

Klausur zur Vorlesung Verkehrsökonomie, SS 2025

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (alle, 20 Punkte)

- (a) Exogene Variable sind der Dateninput des Modells (*exo*: von außen), *gen*: kommend), während die endogenen Variablen die Modellergebnisse sind (*endo*: von innen). Als Modellparameter werden die *Stellschrauben* des Modells bezeichnet, die die mathematische Modellstruktur unverändert lassen, aber die endogenen Variablen quantitativ beeinflussen. Nach der Kalibrierung bleiben die Parameter konstant, während sich die exogenen Variablen, und damit auch die endogenen, je nach Anwendungsfall ändern.

- (b) – Modell unbeschränkten Wachstums: Die Änderung $\frac{dy}{dt}$ ist proportional zur Wachstumsgröße selbst: “Wer hat, dem wird gegeben”.

Lösung des zugehörigen mathematischen Modells $\frac{dy}{dt} = \lambda y$ ist exponentielles Wachstum, $y = y_0 e^{\lambda t}$, wobei der Wachstumskoeffizient λ auch negativ sein kann (exponentielle Schrumpfung)

- Modell beschränkten Wachstums: Die relative Wachstumsrate $\lambda(y) = \frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ sinkt linear mit der Wachstumsgröße und erreicht Null beim Sättigungswert y_s

Mathematisches Modell:

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = \lambda(y) = \lambda_0 (y_s - y)$$

mit anfänglichem Wachstumskoeffizient λ_0 (entspricht unbeschränktem Wachstum, hier ergibt aber nur $\lambda_0 > 0$ Sinn) und Sättigung y_s . Die Lösung ist die S-förmige logistische Funktion

$$y(t) = \frac{y_s}{1 + e^{-\lambda_0(t-t_0)}}$$

wobei t_0 die Zeit angibt, bei der die halbe Sättigung erreicht ist.

Hinweis: Auch die textliche Beschreibung allein ergibt volle Punktzahl.

- (c) 4-Stufen-Modell:

1. Erzeugung bzw Aktivitätenwahl
2. Verteilung bzw Zielwahl
3. Aufteilung bzw Modal Split/Verkehrsmittelwahl
4. Umlegung bzw Routenwahl

Verkettung: Die endogenen Variablen des vorhergehenden Schritts sind die exogenen Variablen des kommenden

Rückkopplung: Aufgrund der Umlegung ergeben sich über die CR-Funktionen auf jeder Kante neue Reisezeiten, also auch neue Routenreisezeiten, die die Bewertung auf dem Level der Verteilung beeinflussen.

Diskrete Entscheidungen: Alle vier Wahlentscheidungen sind durch die diskrete Wahltheorie beschreibbar, wenn man sie als exklusive, vollständige Alternativenmenge (einschließlich Nichtwahl bei der AKtivitieswahl) formuliert

- (d) Zielwahl:

- Exogene Variable (=endogene Variable der Aktivitätenwahl): Quellsummen Q_i und Zielsummen Z_i aller Bezirke i
- Endogene Variablen: Elemente der Verkehrsstrommatrix V_{ij}
- Parameter: Je nach Modell (Sie können es ja wählen) keine (Zufallsmodell), Unschärfe-Parameter $\beta = 1/W_0$ mit W_0 die Zeitunschärfe in Minuten (Wilson-Modell) oder Widerstandsschwelle W_0 (in Minuten) sowie Exponent E im Gravitationsmodell.

Im Rahmen des in der VL vorgestellten “Kennwertmodells” wird die Zielwahl unabhängig voneinander für alle Quelle-Ziel-Gruppen (QZG) g durchgeführt. Auch die exogenen und endogenen Variablen sind daher für jede QZG verschieden.

Aufgabe 2 (alle, 40 Punkte)

- Revealed-Choice, da die Analyse auf realisierten relativen Entscheidungen beruht.
- Bei der diskreten Wahltheorie muss die Alternativenmenge vollständig sein, d.h. es muss eine Wahl innerhalb der Alternativenmenge getroffen werden. Da man die Kunden nicht zum Kauf zwingen kann, muss die Alternative “kein Kauf” enthalten sein ;-)
- Charakteristika: Rabatte R_i ; sozioökonomische Variablen: Geschlecht sowie die vom Kunden bekundete anfängliche Präferenz für E-Bikes (bzw “ehrliche” Räder).
- Das Geschlecht mit den Ausprägungen ‘m’ oder ‘w’ ist eine nominalskalierte (qualitative skalierte) Variable, mit deren Werten man keine Arithmetik (Addition, Multiplikation) betreiben kann. Da die diskrete Wahltheorie Untermodelle in Form von reellwertigen Modellen für die Nutzenfunktionen enthält, die von reellwertigen Parametern abhängen, muss eine Addition und Multiplikation mit reellwertigen Zahlen möglich sein. Deshalb werden bei k Ausprägungen $k - 1$ binäre Dummyvariable verwendet, hier ein Dummy $g = 1$ für weibliche und $g = 0$ für männliche Kunden.
- Modell:

$$\begin{aligned} V_1 &= \beta_1 + \beta_3 R_1 + \beta_4 g + \beta_6 E, \\ V_2 &= \beta_2 + \beta_3 R_2 + \beta_5 g, \\ V_3 &= 0. \end{aligned}$$

Referenzalternative ist $i = 3$, da sie keine alternativenspezifische Konstante hat. β_1 und β_2 geben demgemäß die Ad-Hoc-Präferenz für den Kauf von E-Bikes bzw ehrlicher Räder gegenüber der Option “kein Kauf” an. Da die meisten Kunden kein Rad erwerben, zumal nicht ohne Rabatt ($R_i = 0$), werden stark negative β_1 und β_2 erwartet.

Hintergrund (nicht verlangt): Für männliche Kunden ohne E-Bike-Präferenz und ohne Rabattangebot sind die Kaufwahrscheinlichkeiten für E-Bikes $P_1 = e^{\beta_1} / (e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + 1)$ und für normale Räder $P_1 = e^{\beta_2} / (e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + 1)$.

- Die Bewertung β_3 von Rabatten ist für beide Klassen von Fahrrädern gleich, die Rabatte sind damit generisch formuliert.
- β_3 : Bewertung β_3 von Rabatten: Je mehr Rabatt, desto attraktiver ist das Angebot, daher $\beta_3 > 0$
 - β_4 : Attraktivitätserhöhung von E-Bikes gegenüber normalen Bikes und Nichtkauf bei Frauen. Vorzeichen a priori unklar.

- β_5 : Attraktivitätserhöhung von E-normalen Rädern gegenüber E-Bikes und Nichtkauf bei Frauen. Vorzeichen a priori unklar.

Hinweis: $\beta_4 - \beta_5$ ist die Bevorzugung von E-Bikes gegenüber ehrlichen Rädern bei Frauen gegenüber Männern; $\beta_4 + \beta_5$ gibt an, um wieviel Frauen gegenüber Männern irgendein Rad kaufen.

- β_6 : Quantifizierung der angegebenen Präferenz für E-Bikes: Wie viele Nutzeinheiten ($\approx$ Unschärfen bei der Nutzenbewertung) macht diese aus: Außer bei Lügnern > 0 erwartet.

(h) Es gilt hier

$$R_1 = R_2 = 10\%, \quad g = 0, \quad E = 0$$

und damit

$$V_1 = -1.5, \quad V_2 = -2, \quad V_3 = 0.$$

Mit dem Nenner

$$N = e^{V_1} + e^{V_2} + 1 = 1.358$$

ergeben sich die Auswahlwahrscheinlichkeiten (nur P_1 ist verlangt!) zu

$$P_1 = 0.1643, \quad P_2 = 0.0996, \quad P_3 = 1 - P_1 - P_2 = 0.7361.$$

- (i) Die IIA-Eigenschaft (*independence of irrelevant alternatives*) besagt, dass der relative Attraktivitätsunterschied zweier Alternativen i und j , gemessen im Verhältnis P_i/P_j der Auswahlwahrscheinlichkeiten, nicht von einer dritten Alternative k abhängt: Diese Alternative beeinflusst (wegen der Exklusivität der Alternativen) aber sehr wohl die absoluten Auswahlwahrscheinlichkeiten P_i und P_j und zwar so, dass die Ströme von bzw. zu Alternativen k die Verhältnisse P_i/P_j für alle $i, j \neq k$ unverändert lassen.

Hier ist die dritte Alternative $i = 1$, zu der die Kunden nun zu Lasten des Kaufes von normalen Rädern und des Nichtkaufes strömen, sodass $P_2/P_3 = 12/78$ konstant bleibt. Wir haben also die Bedingungen

$$P_1 = 15\%, \quad \frac{P_2}{P_3} = \frac{12}{78}, \quad P_1 = P_2 = P_3 = 100\%$$

Dies ergibt

$$P_1 = 15\%, \quad P_2 = 11.67\%, \quad P_3 = 73.33\%.$$

Es strömen $5\% \cdot 12/(12 + 78) = 2/3\% = 0.67\%$ der Kunden von den ehrlichen Rädern zu den E-Bikes, aber $5\% \cdot 78/(12 + 78) = 4.33\%$ von den Nichtkäufern. Der Kannibalismus bei den ehrlichen Rädern hält sich also sehr in Grenzen.

Bemerkung: Da die IIA-Eigenschaft unabhängig von den absoluten Kaufwahrscheinlichkeiten der Kundengruppen ist, gilt sie auch über die heterogene Kundschaft hinweg

- (j) (i) Nullhypothese $H_0: \beta_4 \leq 0$ (immer das Gegenteil der zu prüfenden Behauptung, da man Nullhypothesen nur widerlegen, aber nicht bestätigen kann!)
- (ii) Testvariable bei Annahme einer Normalverteilung: $T = \frac{\beta_4}{\sqrt{V(\beta_4)}} \sim N(0, 1)$
- (iii) Realisierung: $t_{\text{data}} = 2.4$
- (iv) Entscheidung: H_0 bei $\alpha = 5\%$ abgelehnt falls $t_{\text{data}} > t_{1-\alpha} = t_{0.95} = 1.69$. Dies ist erfüllt ($p = 1 - \Phi(2.4) = 0.8\%$).

Aufgabe 3 (30 Punkte, nur die 120-Minuten-Teilnehmer!)

- (a) Widerstandsmatrix: kürzeste Wege von Bezirk i nach j (man beachte die Asymmetrie durch die Einbahnstraße):

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 4 & 0 & 6 \\ 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) Bewertungsmatrix mit den Elementen $B_{ij} = e^{-\beta W_{ij}}$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0.449 & 0.135 \\ 0.449 & 1 & 0.301 \\ 0.201 & 0.301 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (c) Für die QZG Sonstiges-Wohnen gelten freie Quell- und harte Ziel-Randsummenbedingungen. Die Verkehrsstrommatrixelemente sind daher durch

$$V_{ij} = V v_{ij} = \frac{V B_{ij} \tilde{q}_i z_j}{n_j}, \quad n_j = \sum_k B_{kj} \tilde{q}_k$$

gegeben. Mit dem Gesamtverkehr $V = \sum_i \tilde{Q}_i = \sum_j Z_j = 3000$ und $\tilde{q}_i = z_j = 1/3$ ergibt sich

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 606 & 257 & 94 \\ 272 & 571 & 210 \\ 122 & 172 & 696 \end{pmatrix}.$$

Test: Die Zielsummen $Z_j = \sum_i V_{ij}$ ergeben alle die vorgegebenen Werte $Z_j = 1000$.

- (d) Die Verkehrsströme vom Bezirk 1 nach 3 und von 3 nach 1 sind wegen der längeren Entfernungen kleiner, insbesondere V_{13} , da man aufgrund der Einbahnstraße von Bezirk 1 nach 3 über Bezirk 2 fahren muss.

Aufgabe 4 (30 Punkte, nur die 120-Minuten-Teilnehmer!)

- (a) Das einfache arithmetische Mittel ist bei Zufallsstichproben unverzerrt, wenn das Register alle statistischen Einheiten, hier also die Personen, auflistet. Das ist beim Melderegister der Fall.
- (b) Sie erfüllt die drei Kriterien
- (i) In der Grundgesamtheit bekannt
 - (ii) Die Personenzahl eines Haushalts hat starken Einfluss auf das Haushaltseinkommen
 - (iii) Die Ausprägungen des Schichtungsmerkmals (1-Personen-Haushalte, Zweipersonen-Haushalte usw.) sind nicht zu ungleich verteilt.
- (c) Hier muss man die erwartete Haushaltsgrößen bei Zufallsstichproben aus dem Personenregister mit den Anteilen in der Grundgesamtheit abgleichen, also das gewichtete arithmetische Mittel mit den Entzerrungsfaktoren nach Haushaltsgröße k anwenden, z.B. für das geschätzte mittlere Haushaltseinkommen y bei Stichprobenumfang n

$$\hat{y} = \frac{1}{n} \sum_i y_i E_{k(i)}$$

Hierbei ist der Entzerrungsfaktor E_k bei Haushaltsgröße k gegeben durch

$$E_k = \frac{f_k^{\text{GG}}}{P_k^{\text{Pers}}}$$

Der Zähler f_k^{GG} ist gleich den angegebenen GG-Anteilen

$$f_1 = 0.45, \quad f_2 = 0.24, \quad f_3 = 0.11, \quad f_4 = 0.09, \quad f_5 = 0.11.$$

Die erwarteten Anteile P_k ergeben sich aus der Personenzahl m_k der Haushaltsgröße k (mit im Mittel $m_5 = 6$ Personen bei der größten Haushaltsklasse) und den damit errechneten Personenanteil an Personen in Haushaltsklasse k

$$P_k = \frac{m_k f_k}{m}.$$

Der Nenner

$$m = \sum_l m_l f_l = 2.28$$

bezeichnet die mittlere Haushaltsgröße einer durch die Zufallsstichprobe aus dem Personenregister gezogenen Person. Damit

$$E_1 = \frac{f_1}{P_1} = m = 2.28$$

und weiterhin

$$E_2 = \frac{m}{2} = 1.14, \quad E_3 = \frac{m}{3} = 0.76, \quad E_4 = \frac{m}{4} = 0.57, \quad E_5 = \frac{m}{5} = 0.38.$$

- (d) Ziehungsmethodik einer Quoten-Stichprobe (statt einer Zufallsstichprobe wie bei (a)-(c)):
- (i) Lege Umfang $n = 2000$ fest
 - (ii) Bestimme die Teilumfänge $n_k = n f_k^{\text{GG}}$
 - (iii) Ziehe aus dem Regiuster eine Person per Zufallsauswahl
 - (iv) Ordne der Person die Haushaltsklasse zu. Falls die Person nicht schon einmal gezogen wurde und die “Schublade” für die Haushaltsklasse k noch weniger als n_k Personen beträgt, füge die Person dieser Schublade hinzu, ansonsten ignoriere sie
 - (v) Wiederhole (iii) und (iv) bis alle “Schubladen” gefüllt sind und die Quoten-Stichprobe darstellen.