

**Klausur zur Vorlesung Methoden Verkehrsökonomie
für Master-Studenten
WS 2010/11
Lösungsvorschlag**

Aufgabe 1 (40 Punkte)

- (a) Es ist eine Revealed-Choice-Befragung, da bereits durchgeführte Entscheidungen erfragt wurden.
- (b) – Generisch (von Person und Alternative abhängig): Ticketpreis C_{ni}
 – Sozioökonomisch (nur von Person abhängig): Einkommen E_n
 – Alternativenspezifische Konstante: δ_{n1}

Das Einkommen muss an $I-1 = 1$ Alternative gekoppelt werden (welche ist egal), da es bei Logitmodellen nur auf die Nutzdifferenz ankommt und ohne Kopplung der Einkommensanteil der Nutzdifferenz immer =0 ist, wodurch das Einkommen nicht berücksichtigt würde.

- (c) – Merkmalssumme X_1 : Gesamter Ticketpreis C bei allen $3 \cdot 9 = 27$ Fahrten. Realisierung anhand der Daten:

$$X_1^{\text{data}} = C^{\text{data}} = \sum_{n=1}^9 (y_{n1}C_{n1} + y_{n2}C_{n2}) = 1\,494 \text{ €}.$$

Prognose durch das Modell falls $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, also $P_{ni} = 1/I = 1/2$:

$$X_1^{\text{model}} = C^{\text{model}} = \sum_{n=1}^9 \left(\frac{3}{2}C_{n1} + \frac{3}{2}C_{n2} \right) = 1\,674 \text{ €}.$$

- Merkmalssumme X_2 : Gesamtzahl N_1 der Entscheidungen für die erste Klasse. Realisierung durch die Daten und Prognose durch das Modell:

$$X_2^{\text{data}} = N_1^{\text{data}} = \sum_{n=1}^9 y_{n1} = 11, \quad N_1^{\text{model}} = \frac{3}{2} * 9 = 13.5.$$

- Merkmalssumme X_3 : Gesamteinkommen der Klasse-1-Fahrer:

$$X_3^{\text{data}} = \sum_{n=1}^9 y_{n1}E_n = 41\,000 \text{ €}, \quad X_3^{\text{model}} = \sum_{n=1}^9 \frac{3}{2}E_n = 31\,650 \text{ €}.$$

- (d) Es kommt bei Logitmodellen nur auf die Nutzdifferenz an, deshalb wird der Preis der 2. Klasse einfach =0 und der der ersten Klasse gleich der in der Aufgabenstellung gegebenen Differenz ΔC zur 2. Klasse gesetzt. Dann ergibt sich

$$V_1(\Delta C, E) = \beta_1 \Delta C + \beta_2 + \beta_3 E, \quad V_2(\Delta C, E) = 0.$$

Damit für den angegebenen Parametervektor $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)^T$ und die angegebenen Preisdifferenzen und Einkommen

$$V_1(40, 3000) = -2.66, \quad V_1(30, 3000) = -0.889.$$

und damit die Wahrscheinlichkeiten, erster Klasse zu fahren:

$$P_1(40, 3000) = \frac{e^{-2.66}}{e^{-2.66} + 1} = 6.5\%, \quad P_1(30, 3000) = \frac{e^{-0.889}}{e^{-0.889} + 1} = 29.1\%$$

Die Wahrscheinlichkeit nimmt um 22.6 % auf 29.1 % zu, wenn man die Preisdifferenz von 40 € auf 30 € reduziert.

(e) Die (asymptotischen) Konfidenzintervalle zur Fehlerwahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%$:

$$\beta_j \in [\hat{\beta}_j - \Delta\hat{\beta}_j, \hat{\beta}_j + \Delta\hat{\beta}_j], \quad \Delta\hat{\beta}_j = z_{1-\alpha/2} \sqrt{V_{jj}}$$

lassen sich direkt aus den angegebenen Schätzern $\hat{\beta}_j$, den Elementen V_{jj} der Varianz-Kovarianz-Matrix und dem Quantil $z_{0.975} = 1.96$ der Standardnormalverteilung berechnen:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\beta}_1 &= 0.149, & \beta_1 &\in [-0.326, -0.0286], \\ \Delta\hat{\beta}_2 &= 3.69, & \beta_2 &\in [-5.99, 1.39], \\ \Delta\hat{\beta}_3 &= 0.00211, & \beta_3 &\in [0.000132, 0.00436]. \end{aligned}$$

Damit sind die Einflussfaktoren Preisdifferenz und Einkommen relevant, nicht hingegen die alternativenspezifische Konstante.

Aufgabe 2 (25 Punkte)

- (a) Hier muss man darauf achten, dass bei nominalskalierten exogenen Variablen, hier das Land, alle Ausprägungen bis auf eine separat durch Selektoren in das Regressionsmodell gekoppelt werden:

$$y(\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 \delta_{x_2, \text{USA}} + \beta_3 x_3 \delta_{x_2, \text{D}} + \beta_4 x_3 \delta_{x_2, \text{USA}} + \epsilon,$$

mit dem Achsabschnitt β_0 , der Bevölkerungsdichte x_1 (kardinalskaliert), dem Land x_2 (nominalskaliert) und den variablen Autokosten x_3 . Der Selektor $\delta_{x_2, \text{USA}} = 1$ falls das Land ist die USA und $=0$ sonst. Die variablen Autokosten x_3 werden ebenfalls durch Selektoren auf jeweils eines der Länder eingegrenzt.

- (b) Elastizität der Autofahrer in den USA:

$$\bar{y} = \frac{55 + 44 + 51 + 41 + 50}{5} = 48.2, \quad \bar{x}_j = \frac{5 + 5 + 7 + 7 + 6}{5} = 6,$$

und damit

$$\epsilon_{\text{USA}} = \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_j} = \frac{6}{48.2} \beta_4 \stackrel{\beta_4=3/\text{km}}{=} \underline{\underline{-0.373}}.$$

Analog Elastizität der deutscher Autofahrer:

$$\bar{y} = 30.4, \quad \bar{x}_j = 20.4, \quad \epsilon_{\text{D}} = \frac{20}{30.4} \beta_3 \stackrel{\beta_3=0.5/\text{km}}{=} \underline{\underline{-0.336}}.$$

Die Nachfrageelastizität ist in den beiden Ländern nur um etwa 15%, nicht um den Faktor 6 unterschiedlich! Der Grund ist, dass ein Cent mehr bei den durch den billigen Treibstoff bedingten geringel variablen Kosten in den USA viel spürbarer ist und auch die Strecken länger sind. [Erklärung nicht verlangt]

- (c) Aus den Daten:

$$\bar{y} = 39.3, \quad \bar{x}_1 = 168.5, \quad \bar{x}_2 = 0.5$$

Aus den in der Aufgabenstellung gegebenen Varianzen und Kovarianzen,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 8220 & -33.75 \\ -33.75 & 0.25 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_y = \begin{pmatrix} -834 \\ 4.45 \end{pmatrix},$$

mit einer Formel aus dem Skript:

$$\det \mathbf{S} = s_{11}s_{22} - s_{12}^2 = \underline{\underline{916}}$$

und damit

$$\hat{\beta}_1 = \frac{s_{1y}s_{22} - s_{2y}s_{12}}{\det(\mathbf{S})} = \underline{\underline{-0.0637}},$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{s_{2y}s_{11} - s_{1y}s_{21}}{\det(\mathbf{S})} = \underline{\underline{9.20}},$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 = \underline{\underline{45.4}}.$$

Aufgabe 3 (25 Punkte)

(a) Matrix des vollen Aufwandes $\mathbf{B} = (\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$ bei 2×2 Matrizen:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 1 - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & 1 - A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(1 - A_{11})(1 - A_{22})} \begin{pmatrix} 1 - A_{22} & A_{12} \\ A_{21} & 1 - A_{11} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.14 & 0.0714 \\ 0.571 & 1.29 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 16 & 1 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(b) Alles wird (Grundregel des Kapitalismus) in Geldeinheiten verrechnet.

– Nachfrage eines Autos vom Endverbraucher zu 20 000 €: $\Rightarrow y_1 = 20\,000$

– Betriebskosten des Endverbrauchers während des Autolebens:

$$200\,000 \text{ km} * 0.2 \text{ €/km} = 40\,000 \text{ €}: \Rightarrow y_2 = 40\,000$$

Wichtig: Diese Güterströme werden *direkt* vom Autobesitzer bzw. den Besitzern nachgefragt. Es handelt sich also um den externen *Nachfragevektor* (in €)

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 20\,000 \\ 40\,000 \end{pmatrix}$$

Insgesamt muss von der Wirtschaft dafür der Erzeugungsvektor mit den Komponenten

$$x_1 = B_{11}y_1 + B_{12}y_2 = 25\,700,$$

$$x_2 = B_{21}y_1 + B_{22}y_2 = 62\,900$$

erzeugt werden. Für die Produktion und den Betrieb eines Autos während seiner Lebenszeit müssen also durch die Verflechtungseffekte *zusätzlich* Autos im Wert von $x_1 - y_1 = 5\,700$ Euro bzw. 0.285 Autos sowie $x_2 - y_2 = 22\,900$ Euro an sonstigen Gütern bereitgestellt werden.

(c) Die in der Aufgabenstellung gegebenen Emissionskoeffizienten der beiden Sektoren werden mit $a_1 = a_2 = 1 \text{ kg CO}_2/\text{€}$ bezeichnet.

(i) Emission an CO_2 durch Betrieb des Autos während der Lebenszeit:

$$E_1 = a_2y_2 = 40\,000 \text{ kg}$$

(ii) Emission an CO_2 durch Herstellung dieses Autos:

$$E_2 = a_1y_1 = 20\,000 \text{ kg}$$

(iii) Zusätzliche Emission durch die Verflechtungseffekte:

$$E_3 = a_1(x_1 - y_1) + a_2(x_2 - y_2) = 28\,600 \text{ kg}$$

Die Emissionen E_1 durch den Betrieb sind im Wesentlichen die dem Autofahrer direkt bewussten Emissionen durch den Treibstoffverbrauch. Diese machen aber nur etwa 45 % der ursächlich diesem Auto zuzuordnenden Gesamtemissionen von $a_1x_1 + a_2x_2 = 88\,600 \text{ kg}$ aus! [Erklärung nicht verlangt]