

Part II.

**Modellierung der
Verkehrsflussdynamik auf
Richtungsfahrbahnen**

7. Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung

Gleichungen sind wichtiger für mich, weil die Politik für die Gegenwart ist, aber eine Gleichung etwas für die Ewigkeit.

Albert Einstein

7.1. Historie und Abgrenzung von verwandten Gebieten

Die Modellierung der Verkehrsdynamik begann bereits in den 30er Jahren des letzten Jahrhunderts; der erste Pionier war wohl B.D. Greenshields (Abb. 7.1).

Erst ab etwa 1990 führten die steigende Verkehrsbelastung, die bessere Datenlage und der zunehmend einfachere Zugriff auf hohe Rechenleistung zu verstärkten Aktivitäten.

Sowohl die hier behandelte **Verkehrsflussdynamik** als auch die (in einer separaten Vorlesung behandelte) **Verkehrsplanung** untersuchen zeitlich veränderliche Verkehrsphänomene. Die beiden Gebiete unterscheiden sich jedoch in Folgendem deutlich:

- Während in der Verkehrs(fluss)dynamik meist wenige Stunden betrachtet werden, geht es bei der Verkehrsplanung um Tage bis Jahre (gl. Abb. 1.2).
- Die Verkehrsflussdynamik setzt i.A. eine extern gegebene Verkehrsnachfrage sowie eine feste Infrastruktur voraus, während die Verkehrsplanung die Dynamik der Nachfrage selbst sowie Auswirkungen einer Veränderung der Infrastruktur modelliert.
- In der Verkehrsflussdynamik wird das menschliche *Fahrverhalten* (Beschleunigen, Bremsen, Spurwechseln, Abbiegen etc.) untersucht, während die übergeordneten Aktionen wie Zahl und Art der zurückgelegten Wege einschließlich Zielwahl (Entfernung), Verkehrsmittelwahl und Routenwahl in das Gebiet der Verkehrsplanung fällt.

Dies spiegelt sich in den typischen Anwendungsbereichen der verschiedenen Modellierungsansätze. *Beispiel:* Man kann die Wahrscheinlichkeit von Staus u.a. verringern durch

1. adaptive Verkehrsbeeinflussung wie Tempolimits und LKW-Überholverbote,
2. indem man die Autofahrer zum Umsteigen auf andere Verkehrsmittel bewegt oder die angefahrenen Ziele (Arbeitsstätten, Läden etc) verkehrsgünstiger legt.

7. Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung

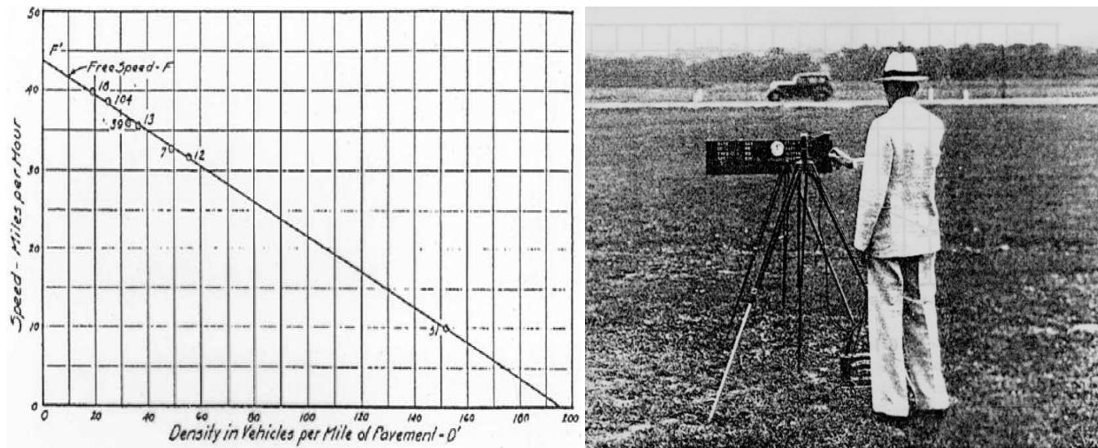


Figure 7.1.: Verkehrstheorie in den 1930-er Jahren: Historisches Geschwindigkeits-Dichte Diagramm und dazugehörige Messung von Greenshields [B.D. Greenshields, "The Photographic Method of Studying Traffic Behavior", Proc. 13. Annual Meeting Highway Research Board (1934), pp. 382.]

Im ersten Fall simuliert man mit Modellen der Verkehrsdynamik, im letzteren Fall wendet man Methoden der Verkehrsplanung an. Man beachte, dass "Dynamik" allein kein Unterscheidungsmerkmal ist, da auch in der Verkehrsplanung zunehmend eine *dynamische Verkehrsumlegung* (d.h. verkehrs- und zeitabhängige Routenwahl) modelliert wird. Der Begriff **Verkehrsdynamik** umfasst beide Ansätze, so dass man spezifischer von **Verkehrsflussdynamik** spricht, wenn nur die Modellierung von Beschleunigungen, Verzögerungen, Fahrsteifenwechsel und Richtungsänderungen gemeint ist.

7.2. Modellkategorien

Verkehrsflussmodelle können nach verschiedenen Ordnungsprinzipien eingeteilt werden:

7.2.1. Inhaltliche Einteilung

Das reale Verkehrsgeschehen kann konzeptionell auf verschiedene Arten abstrahiert und damit modelliert werden:

Makroskopische Modelle betrachten den Verkehrsfluss in Analogie zu einer strömenden Flüssigkeit oder einem Gas. Die dynamischen Größen sind *lokal aggregierte* Größen wie lokale Verkehrsdichte $\rho(x, t)$, lokaler Fluss $Q(x, t)$, mittlere Geschwindigkeit $V(x, t)$ und Geschwindigkeitsvarianz $\theta(x, t)$. Da die Aggregation nur lokal erfolgt, sind diese Größen räumlich und zeitlich veränderlich. Sie werden durch **partielle Differenzialgleichungen** oder **iterierte Abbildungen** beschrieben. Makromodelle sind geeignet

7. Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung

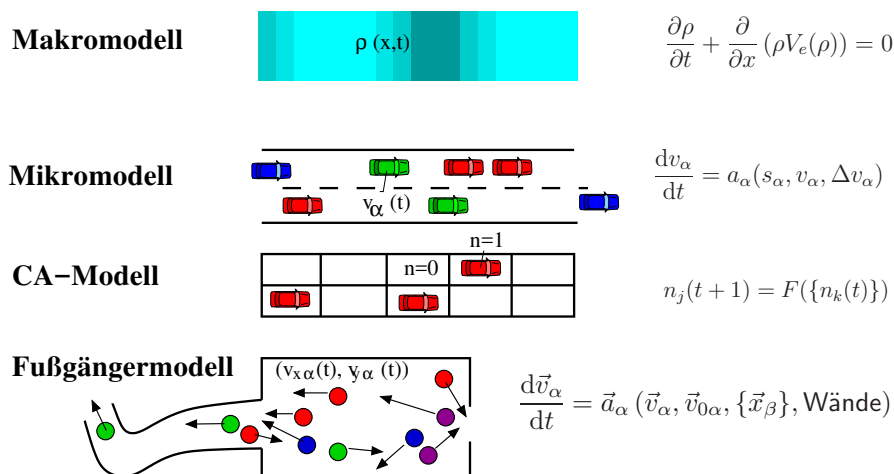


Figure 7.2.: Vergleich der verschiedenen Kategorien von Verkehrsmodellen mit jeweils einer repräsentativen Modellgleichung

- zum Verständnis der Verkehrsdynamik von Staus: Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Staufrenten lassen sich makroskopisch viel leichter beschreiben,
- wenn Effekte, die sich nur schwer makroskopisch beschreiben lassen (z.B. Spurwechsel, verschiedene Fahrer-Fahrzeug-Typen), keine Rolle spielen,
- wenn man nur an makroskopischen Größen interessiert ist,
- wenn die Simulationsgeschwindigkeit kritisch ist, z.B. in Realtime-Anwendungen (spielt mit wachsender Rechnerleistung eine immer geringere Rolle),
- wenn die zur Verfügung stehenden Daten aus heterogenen Datenquellen kommen und/oder inkonsistent sind.

Die Anforderungen Realtimefähigkeit und Auswertung heterogener Datenquellen sind insbesondere beim Anwendungsbereich **Verkehrslageschätzung** gegeben. Dabei werden die Daten zu Informationen aufbereitet, welche z.B. über Verkehrsfunk weitergegeben werden oder als Basis für verkehrsadaptive Navigationssysteme (wie *TMC pro*) dienen.¹

Mikroskopische Modelle oder **Fahrzeugfolgemodelle** gehen von den einzelnen "Fahrer-Fahrzeug-Teilchen" α aus, die als Kollektiv den Verkehrsstrom ausmachen. Sie beschreiben die Reaktion eines jeden Fahrers (Beschleunigen, Bremsen, Spurwechseln) in Abhängigkeit der Nachbarn. Die entsprechenden Größen wie die Positionen $x_\alpha(t)$, Geschwindigkeiten $v_\alpha(t)$ und Beschleunigungen $\dot{v}_\alpha(t)$ werden durch gekoppelte

¹In diesem Anwendungsbereich sind Verkehrsflussmodellierung und die zur Verkehrsplanung gehörige dynamische Routenwahl miteinander verzahnt: Die Verkehrsflussmodellierung bietet eine Entscheidungsgrundlage für die Routenwahl.

7. Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung

gewöhnliche Differenzialgleichungen oder iterierte Abbildungen oder durch Zelluläre Automaten beschrieben. Mikromodelle sind die "Modellklasse der Wahl", falls

- die Problemstellung mikroskopische Größen impliziert, z.B. die Simulation von adaptiven Temporeglern und deren Auswirkung auf den sonstigen Verkehr,
- die Heterogenität des Verkehrs eine wichtige Rolle spielt wie bei Simulation der Auswirkung von Tempolimits, LKW-Überholverbote, etc. Wie in Abschnitt 19 noch gezeigt wird, ist dies bei der Simulation *aller* Maßnahmen zur Verkehrsbeeinflussung der Fall: Grundprinzip ist dabei nämlich immer die Homogenisierung des Verkehrs!
- das Fahrverhalten menschlicher Fahrer (einschließlich Schätzfehler, Reaktionszeiten, Zeiten der Unaufmerksamkeit sowie "Multi-Antizipation" über mehrere Fahrzeuge hinweg) detailliert analysiert werden soll,
- man die Interaktion mit anderen Verkehrsteilnehmern wie Bussen, Radlern, Fußgängern etc. darstellen will.

Mesoskopische Modelle verknüpfen sowohl mikroskopische als auch makroskopische Ansätze, z.B. indem (i) die Parameter des Mikromodells von makroskopischen Größen wie der Verkehrsdichte abhängen, (ii) makroskopische Größen wie Staubeinbruch und Stauende durch mikroskopische Ratengleichungen (z.B. "Mastergleichungen") für die ein- und ausfahrenden Fahrzeuge beschrieben werden, (iii) in gaskinetischen bzw. Boltzmann-artigen Verkehrsmodellen die Änderungen des Verkehrsflusses durch idealisierte "Stoß-Wechselwirkungen" beschrieben werden.

Ansonsten stellen die mesoskopischen Modelle eine bunte Vielfalt ohne weitere Gemeinsamkeiten dar.

Mikroskopische vs. makroskopische Modelle

Bei der Auswahl der Modellklasse sollte man auch beachten, dass man aus Mikromodellen durch lokale **Aggregation** häufig makroskopische Größen, also die Dynamik von Dichte, Fluss oder mittlerer Geschwindigkeit, gewinnen kann. Voraussetzung hierfür ist, dass sich in der mikroskopischen Verkehrsdynamik räumliche Bereiche definieren lassen, die

- *mikroskopisch groß* sind, also mehrere Fahrzeuge enthalten, über die gemittelt werden kann. Makroskopische Größen wie Dichte oder Geschwindigkeitsvarianz sind z.B. prinzipiell nur für mehrere Fahrzeuge definiert.
- Gleichzeitig müssen die Bereiche aber auch *makroskopisch klein* sein, d.h. kleiner als die typischen Ausdehnungen der Strukturen (Staus, Stop-and-Go Wellen, Unterschiede im Verkehrsfluss etc), die man beschreiben möchte.

7. Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung

Eine besondere Form der Aggregation stellt eine simulative Nachbildung der empirischen Verkehrsmessung durch **virtuelle Detektoren** dar, dessen *virtuelle Messungen* man dann mit den Methoden aus den Abschnitten 4 und 5 weiter analysiert.

Die umgekehrte Richtung, d.h. die Gewinnung von Einzelfahrzeuginformationen aus makroskopischen Verkehrsgrößen durch die sogenannte **Disaggregation** ist i.A. problematischer und nur mit sehr einschränkenden Annahmen möglich.

Eine Anwendung der Aggregation und Disaggregation stellt auch die **simultane Verwendung von Mikro- und Makromodellen** dar, bei der man z.B. kritische Stellen wie Streckeninhomogenitäten mikroskopisch modelliert und den Rest makroskopisch. Dazu benötigt man

- einen korrespondierenden Satz aus einem Mikro- und einem Makromodellen, wobei beide Modelle dieselben Modellparameter besitzen und die aggregierten Ergebnisse des Mikromodells möglichst gut denen des Makromodells entsprechen sollten,
- einen **Mikro-Makro** Link für Übergänge vom Mikro- zum Makromodell an einer ortsfesten Stelle (Aggregation),
- und einen entsprechenden **Makro-Mikro-Link**, bei dem die Disaggregation eingesetzt wird,

Martin: Bild mit 2 Pfeilen: Mikromodell “Pfeil Aggregation” Makromodell “pfeil zurueck” Disaggregation

7.2.2. Mathematische Einteilung

Verkehrsflussmodelle können auch nach ihrer mathematischen Form unterschieden werden: [Martin: siehe auch “traffic stream models” README-trafficStream-jun09.txt](#)

- Bei als **partielle Differenzialgleichungen** formulierten Modelle sind sowohl Ort x als auch Zeit t kontinuierlich und der ebenfalls kontinuierliche Zustand (z.B. Geschwindigkeit oder Verkehrsdichte) wird als Funktion der unabhängigen Variablen x und t durch eine oder mehrere Gleichungen beschrieben, welche Ableitungen nach diesen Variablen enthalten. Partielle Differenzialgleichungen sind eine geeignete Form zur Beschreibung makroskopischer Modelle. Trotz ihrer kompliziert erscheinenden Form erlauben sie die einfachste Darstellung vieler Sachverhalte wie das Fundamentaldiagramm oder die Ausbreitung von Stauwellen.
- Bei (gekoppelten) **gewöhnlichen Differenzialgleichungen** liegen die kontinuierlichen Zustandsgrößen (z.B. Geschwindigkeit oder Index des Fahrstreifens) als Funktion der Zeit t als einziger unabhängigen Variable vor. Diese mathematische Form ist geeignet zur Beschreibung zeitkontinuierlicher Mikromodelle.
- (Gekoppelte) **Iterierte Abbildungen** (*iterated maps* oder *coupled maps*) zeichnen sich durch diskrete Zeitschritte und kontinuierliche Wertebereiche für den Zustand (z.B. Geschwindigkeit) aus. Die Zustandsgrößen im neuen Zeitschritt

7. Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung

sind dabei als Funktion dieser Größen im alten Zeitschritt und evtl. weiterer vergangener Zeitschritte gegeben. Iterierte Abbildungen werden sowohl für Mikro- als auch für Makromodelle eingesetzt. Im Falle von Makromodellen ist der Ort diskret und in Zellen eingeteilt, während er bei Mikromodellen zusammen mit der Geschwindigkeit eine kontinuierliche Zustandsvariable (die Fahrzeugposition) darstellt.

Formal sind sie identisch zu den Differenzialgleichungen in Verbindung mit einem (expliziten) numerischen Lösungsverfahren für die Zeitintegration. *Konzeptionell* hingegen besteht ein Unterschied: In iterierten Abbildungen ist die Zeitschrittweite Δt ein Modellparameter und die Genauigkeit der numerische Lösung wird nur durch die Rundungsfehler beschränkt. Bei der numerischen Integration von Differenzialgleichungen hingegen stellt ist der Zeitschritt kein Bestandteil des Modells, sondern eine Hilfsgröße des Lösungsverfahrens. Die mathematische Lösung wird für $\Delta t \rightarrow 0$ erreicht², während die reale Lösung für $\Delta t > 0$ mehr oder weniger große Fehler aufweist.

- Bei **Zelluläre Automaten** liegen alle Größen diskretisiert vor:
 - Der *Ort* ist in feste "Zellen" untergliedert,
 - Der *Zustand* jeder Zelle ist entweder 0 (kein Fahrzeug) oder 1 (Zelle enthält ein Fahrzeug).
 - Die *Zeit* wird in festen Zeitschritten aktualisiert. In jedem Zeitschritt wird die Besetzung der Zellen aus den bisherigen Besetzungen neu bestimmt.

Zelluläre Automaten werden hauptsächlich für mikroskopische Modelle eingesetzt, prinzipiell lassen sich aber auch makroskopische Modelle so beschreiben.

- Schließlich gibt es noch den Fall kontinuierlicher Zeit und diskreter Zustände. Dies ist die mathematische Form der weitaus meisten Spurwechsel-Submodelle, auch bei zeitkontinuierlichen Mikromodellen: Es wird nur ein ganzzahliger Fahrstreifenindex unterschieden, Der Wechsel der Fahrstreifen also (unrealistisch) als *instantaner Wechsel* dargestellt.³

7.2.3. Einteilung gemäß weiterer Kriterien

Martin: Übersichtsvortrag von Schadschneider!

Je nach Problemstellung werden Verkehrsmodelle auch gemäß weiterer Kriterien unterschieden bzw. eingeteilt:

- **Konzeptionelle Grundlage:** Man unterscheidet **heuristische Modelle** von aus allgemeinen Prinzipien hergeleiteten **First-Principles Modellen**.⁴

²Zumindest, wenn das Integrationsverfahren *consistent* ist.

³Bei als iterierte Abbildung formulierten Mikromodellen hat das Spurwechsel-Submodell die mathematische Form eines zellulären Automaten.

⁴Da es sich nach wie vor um Verhaltensmodelle handelt, sind die hier gemeinten *first principles* allerdings nicht so universell und unveränderlich wie z.B. physikalische *first principles*.

7. Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung

Heuristische Modelle bestehen aus einfachen mathematischen Ansätzen (z.B. multivariat-linear oder polynomial in den exogenen Variablen), deren Koeffizienten die Rolle von Modellparametern spielen und z.B. durch Regression an Daten angepasst werden.

First-Principles Modelle hingegen werden aus bestimmten geforderten Eigenschaften abgeleitet. Bei Fahrzeugfolgmodellen kann dies z.B. ein Fahrverhalten sein, welches durch Wunschgeschwindigkeit, Wunschbeschleunigung, komfortable Verzögerung, gewünschte Folgezeit und ein Mindestabstand sein. Idealerweise ist jeder dieser Forderungen ein Modellparameter zugeordnet, dessen Wert dadurch, im Gegensatz zu den heuristischen Modellen, anschaulich ist. Auch diese Modelle werden natürlich an die Daten angepasst. Bei "guten" First-Principles-Modellen bleiben aber auch die kalibrierten Werte im erwarteten Bereich, also z.B. 1 s bis 2 s bei der Folgezeit oder 0.8 m/s^2 bis 2.5 m/s^2 bei den Beschleunigungen.

- **Einfluss des Zufalls.** Zufallsterme sind eine Möglichkeit, Aspekte des Verkehrsflusses zu beschreiben, die nicht bekannt, nicht modellierbar, nicht messbar oder echt zufällig sind.⁵ In der Implementierung der Modelle in Computern werden sie durch den Einsatz von (Pseudo-)Zufallsgeneratoren realisiert werden. Man unterscheidet **deterministische Modelle** ohne jede Zufallskomponente von **stochastischen Modelle** mit Zufallsanteilen, welche auch Rauschterme oder stochastische Terme genannt werden. Der Zufall kann dabei an verschiedenen Stellen in das Modell eingreifen:
 - Mit *Beschleunigungsrauschen* kann man phänomenologisch eine gewisse Unvorhersehbarkeit bzw. Irrationalität des Fahrverhaltens abbilden, der Mensch ist ja keine Maschine. Die meisten zellulären Automaten benötigen solche Rauschanteile, um sinnvolle Ergebnisse zu liefern.
 - Mit *Parameterrauschen* kann man zur Beschreibung der menschlichen Unvorhersehbarkeit eine Stufe tiefer ansetzen: Während beim Beschleunigungsrauschen die Beschleunigung nachträglich verrauscht wird, hängen hier die Fahrverhaltensparameter, also die *Eingangsrößen* der dann deterministischen Beschleunigungsfunktion zufällig von der Zeit ab. Parameterrauschen kann bei Mikro- und Makromodellen eingesetzt werden.
 - Schließlich können auch die Randbedingungen (Zuflüsse und Abflüsse), die Infrastruktur (Streckenkapazitäten) sowie die Zusammensetzung der Fahrzeugflotte stochastische Anteile enthalten.
- **Eigenschaften der Fahrzeugflotte.** Man unterscheidet Modelle mit identischen Fahrer-Fahrzeug-Einheiten von Modellen, welche **heterogenen Verkehr** beschreiben, bei denen also z.B.
 - mehrere Fahrzeugtypen (wie Krafträder, PKW, LKW)

⁵Man sagt auch, dass der Zufall nur eingeführt wird, um Unkenntnis vornehm zu beschreiben.

7. Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung

- und evtl. für jeden Fahrzeugtyp mehrere Parametrisierungen (z.B. vorsichtige/aggressive PKW-Fahrer oder volle/leere LKW)

simuliert werden.

- **Berücksichtigung von Fahrstreifenwechsel.** Werden mehrere Fahrstreifen und entsprechende Wechsel zwischen ihnen berücksichtigt, besteht das Verkehrsflussmodell aus den Subkomponenten Längsdynamik (Beschleunigungsmodell) und Querdynamik (Spurwechselmodell).

Verständnisfrage:

Welche Kategorie von Modellen sind für folgenden Aufgabenstellungen am geeignetsten:

1. Modellgestützte Verkehrszustandsbestimmung für Stauwarnungen oder Routing-Anwendungen,
2. Modellierung von menschlichen Fahrern, einschließlich verschiedener Fahrstile,
3. Entwicklung eines “adaptiven Temporeglers” (ACC, *adaptive cruise control*), also eines Reglers, welcher automatisch in Abhängigkeit von der eigenen Geschwindigkeit, dem Abstand sowie der Geschwindigkeit des Vorderfahrzeugs eine angepasste Beschleunigung ausgibt. (Solche Fahrerassistenzsysteme gibt es in Mittel- und Oberklassefahrzeugen zu kaufen.)
4. Modellierung der *verkehrlichen Auswirkungen* der adaptiven Temporegler und anderer Fahrerassistenzsystemen auf die übrigen (nichtausgestatteten) Fahrzeuge,
5. Modellierung sehr großer Netze, z.B. das Autobahnnetz von ganz Deutschland,
6. Modellierung komplizierter Netze wie Stadtverkehr
7. Abschätzung, ob die häufigen Staus auf Strecke X durch eine neu zu bauende Umgehungsstrecke Y vermieden werden können,
8. Modellierung der Auswirkungen von Verkehrsbeeinflussungsmaßnahmen wie Tempolimits oder Gebote, bestimmte Fahrstreifen zu nutzen.
9. Modellierung der verkehrlichen Auswirkungen von Ausfahrten.

7. Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung

Figure 7.3.: Schematische Skizze der Pilgerströme bei der Hadj in Mekka in den Jahren 2006 und 2008. **Martin: Bild, Zitat** Die geänderte Routenführung im Jahre 2008 geht teilweise auf die Ergebnisse der Fußgängermodellierung zurück.

Verständnisfrage:

Es wird immer wieder für eine Einführung von Tempo 130 auf deutschen Autobahnen argumentiert. Dabei werden vor Allem folgende Gesichtspunkte betrachtet:

- *Sicherheitswirkung*: Bei Tempo 130 geht die Zahl der Unfälle zurück.
- *Verkehrsauswirkung*: Bei gleicher Verkehrsnachfrage wird durch Tempo 130 die dynamische Streckenkapazität erhöht bzw. die Verkehrsstaus reduziert.
- *Umweltauswirkung*: Tempo 130 reduziert den Treibstoffverbrauch, die CO₂- Emissionen, den Lärm usw.
- *Makroökonomische Auswirkung*: Die volkswirtschaftlichen internen und externen Kosten (Zeitverbrauch, Treibstoffverbrauch, Kosten durch Unfälle usw.) gehen zurück.

Über welche dieser Aspekte kann man mit Verkehrsflussmodellen quantitative Aussagen machen? Gegebenenfalls mit welchen Modellkategorien?

7.2.4. Nichtmotorisierter Verkehr

Neben der Verkehrsdynamik von motorisierten Straßenverkehr wird auch die Dynamik von Fußgängerströmen mit meist mikroskopischen **Fußgängermodellen** abgebildet. Wie beim Straßenverkehr unterscheidet man dabei Modelle mit kontinuierlichen Größen, sogenannte **soziale Kräfte Modelle**, und diskrete zellulären Automaten. Im Gegensatz zu Kfz-Verkehr können sich Fußgänger frei in *zwei* Raumdimensionen bewegen. Es gibt also zwei gleichwertige Ortskoordinaten x und y und z.B. neben der Wunschgeschwindigkeit auch eine Wunsch(ziel-)richtung. Anwendungen sind z.B.

- Dimensionierung und Design von Flughäfen, großen Plätzen, Einkaufszentren, Massenveranstaltungen,
- Simulieren von Evakuierungs-Szenarien (aus Gebäuden, Schiffen, etc)

Ein prominentes Beispiel einer Verkehrsflussmodellierung von Fußgängern ist die Modellierung der Pilgerströme bei der jährlichen Hadj von Mekka, bei der Hunderttausende von Pilgern insgesamt drei Säulen (Jamaraths), welche den Teufel darstellen, steinigen müssen. Hintergrund ist eine Verbesserung des Verkehrsflusses durch eine geeignete Routenführung der Pilger. Regelmäßig kam es nämlich in der Vergangenheit als Folge der Staus zu Dutzenden von Todesfällen durch zu Boden getrampelte Pilger.

7. Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung

Für die Verkehrsflussmodellierung weiterer Verkehrsarten wie Radfahrer, Läufer oder Inline-Skater) existieren im Gegensatz zur Verkehrsplanung nahezu keine Verkehrsflussmodelle, obwohl dafür durchaus Bedarf besteht. [Martin: neues Radfahrmodell zitieren](#) Beispiele beinhalten die Modellierung von Radverkehr in Schwellenländern oder der Einsatz von Flussmodellen für Läufer und Inlineskater als Planungs- und Organisationstool für Großveranstaltungen wie Stadtmarathons oder das *Dresdner Nachtskaten* (Bewertung der Streckenführung, Erkennung von Engstellen, ggf. Teilnehmerbegrenzung).

8. Makromodelle I: Die Kontinuitätsgleichung

Wer einen Fehler gemacht hat und ihn nicht korrigiert, begeht einen zweiten.

Konfuzius

Die **Kontinuitätsgleichung** beschreibt die Tatsache, dass auf einem Streckenabschnitt keine Fahrzeuge “verloren gehen” oder “aus dem Nichts” entstehen. Die Fahrzeugzahl kann sich also nur durch stromaufwärts in den Abschnitt hineinfließenden Verkehr, durch stromabwärts abfließenden Verkehr sowie ggf. durch Zu- und Abflüsse an Ein- und Ausfahrten ändern. Die Kontinuitätsgleichung beschreibt diese Fahrzeugbilanz mit Hilfe der **Verkehrsdichte** sowie der **hydrodynamischen Fluss-Dichte-Beziehung**. Zunächst werden deshalb diese Größen für Richtungsfahrbahnen mit mehreren Fahrstreifen definiert.

8.1. Verkehrsdichte und hydrodynamische Fluss-Dichte-Beziehung

Allgemein wird die Verkehrsdichte wie im Abschnitt 4.3.1 durch die Zahl der Fahrzeuge pro Streckeneinheit definiert. Für die Beschreibung des Verkehrsflusses auf Richtungsfahrbahnen mit $I > 1$ Fahrstreifen sind folgende Verkehrsdichten wichtig:

- Die *Einzeldichte* $\rho_i(x, t)$ auf dem Fahrstreifen i ,
- die *Gesamtdichte* $\rho_{\text{tot}}(x, t)$ der Richtungsfahrbahn,
- und die über alle Fahrstreifen $i = 1, \dots, I$ *gemittelte Dichte* $\rho(x, t)$.

Diese Dichten hängen über die Beziehung

$$\rho_{\text{tot}}(x, t) = \sum_{i=1}^I \rho_i(x, t) = I\rho(x, t) \quad (8.1)$$

miteinander zusammen. Die mittlere Dichte ist also durch das arithmetische Mittel definiert. Je nach Aufgabenstellung ist mal die eine, mal die andere Dichtedefinition günstiger: Die Kontinuitätsgleichung ist für die Gesamtdichte ρ_{tot} besonders einfach formulierbar, da die Fahrzeugbilanz nur für die gesamte Richtungsfahrbahn und nicht für die einzelnen Fahrstreifen gilt. Hingegen lassen sich Eigenschaften von Makromodellen am einheitlichsten mit über alle Fahrstreifen gemittelte Größen formulieren, da die Verkehrsdynamik i.W. dadurch bestimmt ist, z.B. durch die Kapazität pro Fahrstreifen

8. Makromodelle I: Die Kontinuitätsgleichung

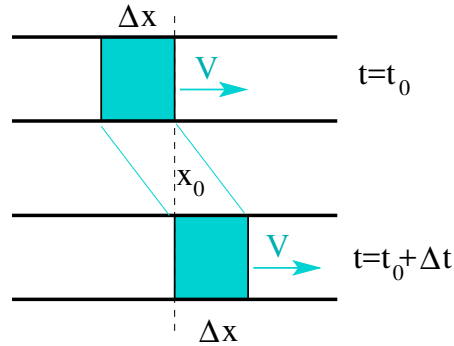


Figure 8.1.: Zur Veranschaulichung der hydrodynamischen Relation $Q = \rho V$. Im blauen Bereich sind $\Delta n = \rho \Delta x$ Fahrzeuge. Innerhalb der Zeit $\Delta t = \Delta x / V$ bewegt sich dieser Bereich komplett über einen festen Punkt x_0 , so dass an diesem Punkt der Fluss $Q = \Delta n / \Delta t = \rho \Delta x / \Delta t = \rho V$ herrscht.

oder durch das mit fahstreifengemittelten Flüssen und Dichten formulierte Fundamentaldiagramm.

Da es sich bei allen in Makromodellen vorkommenden Dichte-Variablen um *echte* räumliche Dichtewerte handelt, gelten für jede Fahrstreifen getrennt exakt die in Abb. 8.1 veranschaulichten "hydrodynamischen" Fluss-Dichte-Beziehungen ¹

$$Q_i(x, t) = \rho_i(x, t) V_i(x, t), \quad (8.2)$$

wobei $Q_i(x, t)$ die Flüsse auf Fahrstreifen i an der Stelle x zur Zeit t sowie $V_i(x, t)$ die entsprechenden, über einen gewissen räumlichen Bereich Δx um x lokal gemittelten Fahrzeuggeschwindigkeiten darstellen.

Definiert man die über die Fahrstreifen gemittelte Geschwindigkeit $V(x, t)$ durch das mit den Dichten *gewichtete* arithmetische Mittel,

$$V(x, t) = \sum_{i=1}^I w_i V_i(x, t), \quad w_i = \frac{\rho_i(x, t)}{\sum_{j=1}^I \rho_j(x, t)} \quad (8.3)$$

und den mittleren Fluss durch das *einfache* arithmetische Mittel,²

$$Q(x, t) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I Q_i(x, t) = \frac{Q_{\text{tot}}}{I} \quad (8.4)$$

so gelten formal die gleichen hydrodynamischen Relationen auch für die Mittelwerte und die Gesamtgrößen:

¹Wenn man Diffusion außer Acht lässt, vgl. Abschnitt 9.4.

²Fluss und Dichte sind *extensive* Größen, bei denen eine Summenbildung sinnvoll ist, während dies für *intensive* Größen wie der Geschwindigkeit nicht gilt. Allgemein ergeben sich sinnvolle Mittelwerte extensiver Größen durch einfache arithmetische Mittel, während dies für intensive Größen nicht gilt.

8. Makromodelle I: Die Kontinuitätsgleichung

$$Q(x, t) = \rho(x, t)V(x, t) \quad \text{Hydrodynamische Flussbeziehung.} \quad (8.5)$$

bzw.

$$Q_{\text{tot}}(x, t) = \rho_{\text{tot}}(x, t)V(x, t). \quad (8.6)$$

Verständnisfrage:

Zeigen Sie die Gültigkeit der hydrodynamischen Relationen (8.5) bzw. (8.6).
Zeigen Sie auch, dass diese z.B. bei ungewichteten oder flussgewichteten Geschwindigkeiten der einzelnen Fahrstreifen nicht gelten

8.2. Die Kontinuitätsgleichung für verschiedene Streckenkonfigurationen

Wir betrachten drei Fälle in der Reihenfolge steigender Komplexität: (i) Homogene Strecke, (ii) Bereich von Zu- oder Abfahrten, (iii) Bereiche mit Änderungen der Fahrstreifenanzahl.

8.2.1. Homogene Strecke

Wir betrachten einen Streckenabschnitt der Länge Δx (Abb. 8.2) ohne Zufahrten, Abfahrten oder anderen Inhomogenitäten wie Änderung der Fahrstreifenanzahl, Änderung des Tempolimits etc. Dabei soll die Länge Δx einerseits *mikroskopisch groß* sein, so dass genügend Fahrzeuge zur Gewinnung makroskopischer Größen enthalten sind. Andererseits sei Δx aber auch *makroskopisch klein*, so dass Dichten und Flussgradienten in diesem Bereich angenähert konstant sind.³ Dann gilt für die Fahrzeugzahl $n(t)$ zur Zeit t im betrachteten Bereich:

$$n(t) = \int_x^{x+\Delta x} \rho_{\text{tot}}(x', t) dx' \approx \rho_{\text{tot}}(x, t) \Delta x. \quad (8.7)$$

Da im Falle homogener Abschnitte eine Änderung der Fahrzeugzahl nur durch Zuflüsse Q_{in} und Abflüsse Q_{out} an den Abschnittsgrenzen erfolgen kann (vgl. Abb. 8.2) und diese Flüsse durch die Querschnittsflüsse $Q_{\text{tot}}(x, t)$ bzw. $Q_{\text{tot}}(x+\Delta x, t)$ an den jeweiligen Orten gegeben sind, ergibt sich folgende Fahrzeugbilanzgleichung:

$$\frac{dn}{dt} = Q_{\text{in}}(t) - Q_{\text{out}}(t) = Q_{\text{tot}}(x, t) - Q_{\text{tot}}(x + \Delta x, t),$$

Kombiniert man diese Gleichung mit der nach der Zeit abgeleiteten Gleichung (8.7), $\frac{dn}{dt} \approx \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{\text{tot}} \Delta x) = \Delta x \frac{\partial \rho_{\text{tot}}}{\partial t}$, erhält man

$$\frac{\partial \rho_{\text{tot}}(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{\Delta x} \frac{dn}{dt} = -\frac{Q_{\text{tot}}(x + \Delta x, t) - Q_{\text{tot}}(x, t)}{\Delta x} \approx -\frac{\partial Q_{\text{tot}}(x, t)}{\partial x},$$

³Beide Bedingungen sind typischerweise für einen Wert von etwa $\Delta x = 100$ m erfüllt.

8. Makromodelle I: Die Kontinuitätsgleichung

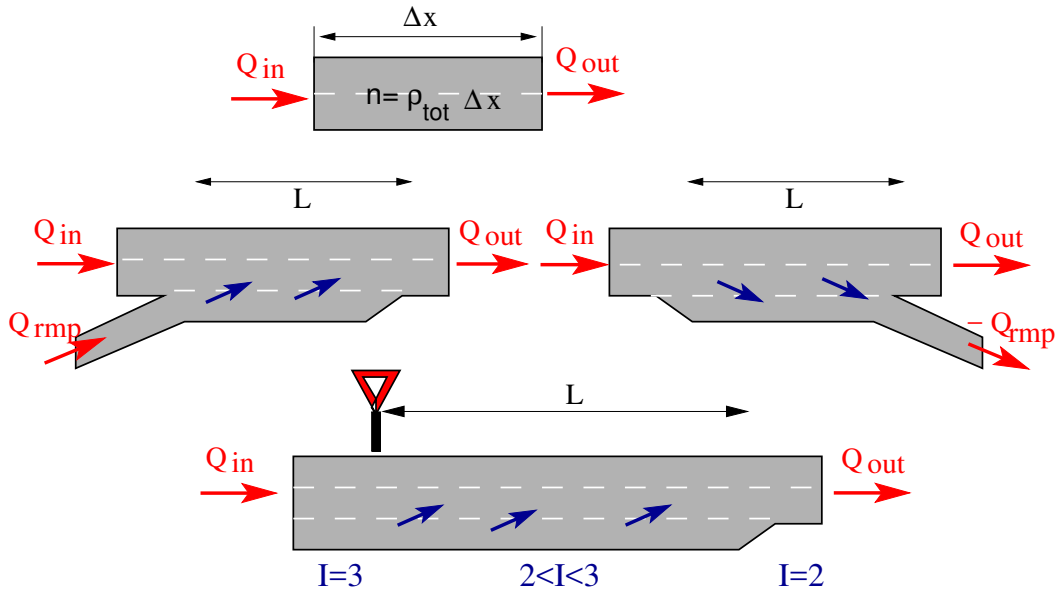


Figure 8.2.: Zur Herleitung der Kontinuitätsgleichungen (8.8) - (8.13) in den drei Fällen (i) homogene Strecke, (ii) Zu- oder Abfahrten, (iii) Fahrstreifen-zahländerung. Im letzten Fall bezieht sich Gl. (8.13) auf Mittelwerte über die $I = 2$ durchgängigen Fahrstreifen.

oder mit der hydrodynamischen Fluss-Geschwindigkeits-Beziehung $Q_{\text{tot}} = \rho_{\text{tot}} V$ und Weglassen der expliziten Kennzeichnung der Orts- und Zeitabhängigkeiten:

$$\frac{\partial \rho_{\text{tot}}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_{\text{tot}} V)}{\partial x} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V)}{\partial x} = 0. \quad (8.8)$$

Da $\rho = \rho_{\text{tot}}/I$ und I hier konstant ist, sieht die Gleichung für ρ hier genauso wie die für ρ_{tot} aus.

8.2.2. Bereich von Zu- oder Abfahrten

Hier kommen zur Flussbilanz neben den Zu- und Abflüssen auf und von den Hauptfahrstreifen noch der Zufluss bzw. Abfluss $Q_{\text{rmp}}(t)$ von bzw. zu den Rampen hinzu, also (vgl. Abb. 8.2)

$$\frac{dn}{dt} = Q_{\text{in}}(t) - Q_{\text{out}}(t) + Q_{\text{rmp}}(t).$$

Der Rampenfluss Q_{rmp} ist positiv für eine Zufahrt und negativ für eine Abfahrt. Bei Zu- oder Abfahrten mit mehreren Fahrstreifen ist Q_{rmp} gleich der Summe der Flüsse über alle Fahrstreifen der Rampen. Nimmt man an, dass sich die Zu- bzw. Abflüsse gleichmäßig auf die gesamte Länge $\Delta x = L_{\text{rmp}}$ der Rampe verteilen, erhält man *innerhalb*

8. Makromodelle I: Die Kontinuitätsgleichung

des Rampenbereichs einen zusätzlichen Flussgradienten $dQ_{\text{rmp}}/dx = Q_{\text{rmp}}/L_{\text{rmp}}$, und damit

$$\frac{\partial \rho_{\text{tot}}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{\text{tot}}V)}{\partial x} = \frac{Q_{\text{rmp}}}{L_{\text{rmp}}} := I\nu_{\text{rmp}}(x, t), \quad (8.9)$$

oder für die fahstreifengemittelte Dichte

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = \nu_{\text{rmp}}(x, t) \quad (8.10)$$

mit

$$\nu_{\text{rmp}}(x, t) = \begin{cases} \frac{Q_{\text{rmp}}(t)}{IL_{\text{rmp}}} & \text{falls } x \text{ auf Höhe einer Rampe} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.11)$$

8.2.3. Zu- oder Abfahrten und Änderungen der Zahl der Fahrstreifen

Bei einer Fahrstreifenreduktion von I auf $I - 1$ wechseln die Fahrer bereits im Vorfeld (typischerweise 200 m bis 1000 m vor der Position der Sperrung) auf die durchgehenden Fahrstreifen.⁴ Steht ab einer gewissen Stelle ein neuer Fahrstreifen zur Verfügung, wird dieser hingegen mehr oder weniger sofort (innerhalb weniger 100 m nach der Erweiterung von I auf $I + 1$) belegt.

Wie bisher betrachten wir bei der makroskopischen Modellierung nur die Dynamik der Gesamtdichte bzw. der mittleren Dichte, also sogenannte **effektive Einspurmodelle**. Gekoppelte makroskopische Modelle, welche Dichte und Fluss separat für jeden Fahrstreifen betrachten und bei denen die Einzelgrößen über ein Spurwechselmodell gekoppelt sind, werden nicht weiter betrachtet.

Im Rahmen von effektiven makroskopischen Modellen kann man diese Spurwechselaktivitäten dadurch modellieren, dass man nahe der Position einer Sperrung bzw. Erweiterung eine *nicht ganzzahlige* und *mit dem Ort veränderliche* Fahrstreifenanzahl $I(x)$ einführt (vgl. Abb. 8.2) und alle Mittelwerte extensiver (additiver) Variablen, also Fluss und Dichte und Fluss, *auf diese stetig veränderliche Fahrstreifenanzahl* bezieht:

$$Q(x, t) = \frac{Q_{\text{tot}}(x, t)}{I(x)}, \quad \rho(x, t) = \frac{\rho_{\text{tot}}(x, t)}{I(x)}. \quad (8.12)$$

Die über die Fahrstreifen gemittelte Geschwindigkeit $V(x, t)$ hingegen ist unverändert durch Gl. (8.3) gegeben und auch die hydrodynamische Beziehung (8.5), $Q = \rho V$, bleibt gültig. Das unterschiedliche Verhalten der Fahrer beim Verlassen einer nicht durchgehenden Spur bzw. beim Wechsel auf eine neue Spur lässt sich durch die Ortsabhängigkeit der reellwertigen Fahrstreifenanzahl modellieren: Eine Fahrstreifenanzahl von z.B. $I(x) = 2.5$ besagt beispielsweise

- im Falle einer Reduktion $I = 3 \rightarrow 2$, dass am Ort x die Hälfte der ursprünglichen Nutzer des zu sperrenden Fahrstreifens denselben bereits verlassen haben (z.B. 600 m stromaufwärts der eigentlichen Sperrung),

⁴Nach der StvO sollte man erst unmittelbar davor wechseln, den Fahrstreifen also "ausnutzen".

8. Makromodelle I: Die Kontinuitätsgleichung

- im Falle einer Erweiterung $I = 2 \rightarrow 3$, dass bereits die Hälfte der potenziell wechselnden Fahrzeuge auf den neuen Fahrstreifen gewechselt sind (z.B. 200 m stromabwärts der eigentlichen Erweiterung).

Die Kontinuitätsgleichung für die *Gesamtdichte* ρ_{tot} ist dieselbe wie (8.8) bzw. (8.9). Da die Fahrdynamik jedoch von *fahrstreifenbezogenen* Flüssen und Dichten abhängt, muss man die Kontinuitätsgleichung für die Fahrstreifen-Mittelwerte $\rho = \rho_{\text{tot}}/I(x)$ und $Q_{\text{tot}}/I(x)$ formulieren. Setzt man $\rho_{\text{tot}} = I(x)\rho$ und $Q_{\text{tot}} = I(x)Q$ in (8.9) ein, erhält man (die expliziten Orts- und Zeitabhängigkeiten der makroskopischen Größen werden wieder der Übersichtlichkeit halber weggelassen):

$$\begin{aligned}\frac{\partial(I\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(IQ)}{\partial x} &= I\nu_{\text{rmp}} \\ I\frac{\partial\rho}{\partial t} + Q\frac{\partial I}{\partial x} + I\frac{\partial Q}{\partial x} &= I\nu_{\text{rmp}} \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= -\frac{Q}{I}\frac{\partial I}{\partial x} + \nu_{\text{rmp}},\end{aligned}$$

und mit $Q = \rho V$ schließlich

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = -\frac{\rho V}{I}\frac{\partial I}{\partial x} + \nu_{\text{rmp}}(x) \quad \text{Kontinuitätsgleichung.} \quad (8.13)$$

Die Kontinuitätsgleichung (8.13) beschreibt den allgemeinsten, hier behandelten Fall. Gegenüber (8.9) sieht man, dass zum Rampen-Quellterm ν ein zusätzlicher Quellterm $\nu_I = -\frac{Q}{I}\frac{\partial I}{\partial x}$ hinzugekommen ist, welcher die Nettoflüsse von/auf die zu sperrenden/neuen Fahrstreifen beschreibt.

Verständnisfrage:

Das gewichtete Geschwindigkeitsmittel (8.3) über alle Fahrstreifen bleibt unverändert gültig, wenn man im Falle nichtganzzahliger Fahrstreifenzahlen die Summenobergrenze als die bezüglich I nächsthöhere *ganzen* Zahl definiert. Machen Sie sich für den Fall einer Fahrstreifenanzahlreduktion $3 \rightarrow 2$ klar, dass sich trotz des unstetigen Sprungs des maximalen Summationsindex (z.B. 3 bei $I = 2.01$, aber 2 bei $I = 2$) das Geschwindigkeitsmittel (8.3) stetig verhält!

Verständnisfrage:

Häufig wechseln die Autofahrer bereits am Anfang einer Auffahrt auf die Hauptstrecke, vor allem bei freiem Verkehr. Wie würde man das modellieren?

8. Makromodelle I: Die Kontinuitätsgleichung

Verständnisfrage:

Bei Auffahrten mit kurzen Beschleunigungsrampen müssen Fahrzeuge häufig mit vergleichsweise niedriger Geschwindigkeit auf die Hauptfahrbahnen wechseln. Kann man die dadurch verursachten Störungen im Rahmen der Kontinuitätsgleichung modellieren?

8.3. Diskussion der Kontinuitätsgleichung

Zunächst gilt folgende wichtige Bemerkung:

Aufgrund ihrer Herleitung allein aus der Fahrzeugerhaltung ist die Kontinuitätsgleichung Bestandteil aller (!) makroskopischen Modelle. Ihre Form hängt nur von der Infrastruktur ab.

Ohne Zu- oder Abfahrten gilt: Die Fahrzeugzahl kann sich nur durch Zu- und Abflüsse an den Streckengrenzen ändern. Fließen mehr Fahrzeuge heraus als herein, also $\frac{\partial Q_{\text{tot}}}{\partial x} > 0$, so ist die Dichteänderung $\frac{\partial \rho_{\text{tot}}}{\partial t}$ negativ. Ist, z.B. wegen einer plötzlichen Störung, der Abfluss über eine längere Zeit kleiner als der Zufluss, dann führt die dann positive Dichteänderung früher oder später zum Stau.

Bei konstanter Fahrstreifenzahl und ohne Zu- oder Abfahrten gilt die quellfreie Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ auch für die über die Richtungsfahrbahn gemittelten Größen ρ bzw. Q .

Verringert sich die Fahrstreifenzahl und betrachtet man Dichte und Fluss als Mittel nur über die *durchgängigen* Fahrstreifen,⁵ so bewirken die Wechsel von den zu sperrenden Fahrstreifen auf die betrachteten, denen keine entgegengesetzte Wechsel gegenüberstehen, einen Netto-Zufluss und damit über den dann positiven Term $-\frac{Q}{I} \frac{\partial I}{\partial x}$ einen Dichteanstieg. Betrachtet man die Gesamtdichten und Flüsse, gibt es im Gegensatz dazu keine "Quellterme".

Mit Zu- oder Abfahrten bewirken neben den Flussgradienten auf der Hauptstrecke auch die Zu- bzw. Abflüsse einen Anteil an der Dichteänderung, der allerdings nur im Bereich der Rampen effektiv ist. Die Quellterme sind proportional zu den Rampenflüssen. Der Proportionalitätsfaktor $\nu_{\text{rmp}}(x)$

- steigt mit sinkender Rampenlänge, da dann auf jedem Abschnitt fester Länge mehr Fahrzeuge wechseln müssen,
- sinkt mit steigender Fahrstreifenzahl, da sich dann der Rampenfluss auf mehrere Fahrstreifen aufteilen kann.

⁵Tatsächlich werden auch die zu sperrenden/neuen Fahrstreifen mit einem vom nichtganzzahligen Rest von I beschriebenen Bruchteil gewichtet, dies ändert aber nichts am Gedankengang.

8. Makromodelle I: Die Kontinuitätsgleichung

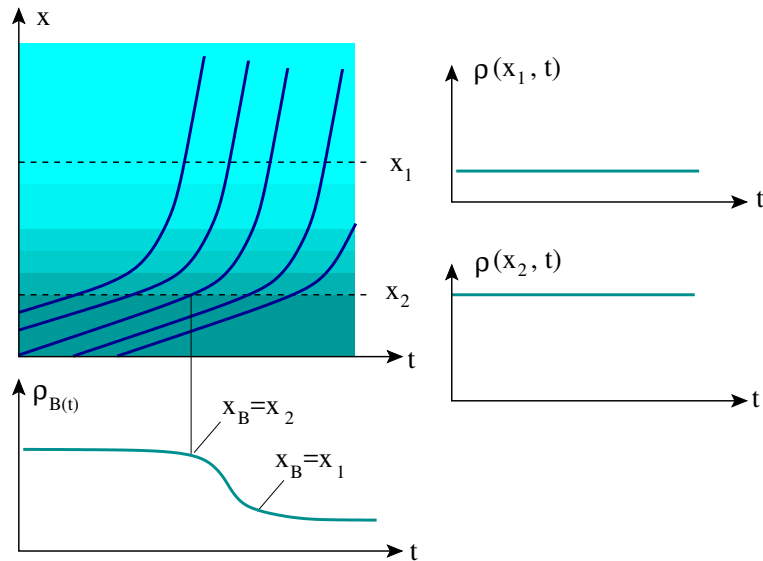


Figure 8.3.: Dichteänderung $\frac{d\rho_B}{dt} = \frac{d\rho(x,t)}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + V\frac{d\rho}{dx}$ bei Ausfahrt aus dem Stau aus der Sicht eines ausfahrenden Autofahrers B (mittlere Trajektorie). Da hier eine stehende Stauwelle dargestellt ist, gilt $\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = 0$.

Formulierung mit der konvektive Zeitableitung der Geschwindigkeit

Mit $\partial(\rho V)/\partial x = \rho\partial V/\partial x + V\partial\rho/\partial x$ können wir die Kontinuitätsgleichung (8.8) auch in der Form

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + V\frac{\partial\rho}{\partial x} = -\rho\frac{\partial V}{\partial x} \quad (8.14)$$

schreiben. Wir wollen nun die Bedeutung der linken Seite dieser Gleichung näher diskutieren, indem wir die Änderung der Dichte $\left.\frac{d\rho}{dt}\right|_B$ vom Standpunkt des *Fahrers*, also eines sich auf einer Fahrzeug-Trajektorie $x(t)$ mit $\frac{dx}{dt} = V(x, t)$ bewegenden Beobachters B betrachten (vgl. Abb. 8.3): Mit der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\rho}{dt}\right|_B &= \frac{d\rho(x(t), t)}{dt} \\ &= \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial t} \\ &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + V(x, t)\frac{\partial\rho}{\partial x}. \end{aligned}$$

Die linke Seite von (8.14) entspricht also genau der vom Fahrer wahrgenommenen Änderung der Dichte mit der Zeit!

Dies kann man auf die Änderung beliebige Felder $F(x, t)$ verallgemeinern, indem man die **substanzielle bzw. totale Zeitableitung** $\frac{dF(x,t)}{dt}$ als Änderungsrate für einen mit

8. Makromodelle I: Die Kontinuitätsgleichung

der Geschwindigkeit $V(x, t)$ mitbewegten Beobachter definiert und das Ganze durch die üblichen, für ortsfeste Beobachter gültigen partiellen Zeitableitungen $\frac{\partial F(x, t)}{\partial t}$ ausdrückt. Analog wie oben ergibt sich die totale Zeitableitung durch

$$\frac{dF(x, t)}{dt} = \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} + V(x, t) \frac{\partial F(x, t)}{\partial x}. \quad (8.15)$$

Für homogene Streckenabschnitte kann man die Kontinuitätsgleichung daher auch ausdrücken durch

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (8.16)$$

Gleichung (8.16) besagt, dass sich die Dichte erhöht, wenn der Geschwindigkeitsgradient $\partial V/\partial x$ negativ ist, im mikroskopischen Bild also das Vorderfahrzeug langsamer ist. Dadurch verringert sich natürlich der Abstand, die mikroskopische Entsprechung einer erhöhten Dichte! Außerdem kann die Dichte nicht negativ werden, denn $\rho(x, t) = 0$ impliziert $d\rho/dt = 0$. (Negative Autos wären aber auch eine absurde Vorstellung.)

Verständnisfrage:

Zeigen Sie mit Hilfe einer der obigen Formen der Kontinuitätsgleichung, dass sich die Gesamt-Fahrzeugzahl auf einer Kreisstrecke mit variabler Fahrstreifenanzahl $I(x)$, aber ohne Zu- und Abfahrten, nicht ändert.

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

Die Vorurteile eines Professors nennt man Theorie.

Mark Twain

Die für alle Makromodelle gültige Kontinuitätsgleichung ist eine (partielle) Differenzialgleichung, in der zwei makroskopische Größen vorkommen: Die Dichte $\rho(x, t)$ und die Geschwindigkeit $V(x, t)$ bzw. der Fluss $Q(x, t)$. Für eine vollständige Beschreibung benötigt man noch eine zusätzliche Gleichung für den Fluss bzw. die Geschwindigkeit. *Die verschiedenen Makromodelle unterscheiden sich nur in der Art dieser zweiten Gleichung.*

1955/56 schlossen Lighthill und Whitham bzw. Richards die Kontinuitätsgleichung durch die statische **Gleichgewichtsannahme**

$$Q(x, t) = Q_e(\rho(x, t)) = \rho(x, t)V_e(\rho(x, t)) \quad \text{bzw.} \quad V(x, t) = V_e(\rho(x, t)). \quad (9.1)$$

Es wird also angenommen, der Verkehrsfluss $Q(x, t)$ bzw. die mittlere Geschwindigkeit $V(x, t)$ seien eindeutig durch die Fahrzeugdichte $\rho(x, t)$ gegeben. Das sogenannte **Fundamentaldiagramm** $Q_e(\rho)$ bzw. die Geschwindigkeits-Dichte-Relation $V_e(\rho)$ werden dabei in der Regel als Fitfunktion an empirische Verkehrsdaten gewählt.

Setzt man die Gleichgewichtsannahme (9.1) in die Kontinuitätsgleichung (8.8) ein, so erhält man unter Verwendung der Kettenregel $\frac{\partial Q_e}{\partial x} = \frac{dQ_e(\rho)}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$ das **Lighthill-Whitham-Richards-Modell (LW- bzw. LWR-Modell)**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dQ_e(\rho)}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \text{LWR-Modell.} \quad (9.2)$$

Da die Gleichung $Q_e(\rho)$ für das Fundamentaldiagramm hier nicht festgelegt werden muss und viele (mehr oder weniger realistische) konkrete Beziehungen vorgeschlagen wurden, stellt Gl. (9.2) kein Modell im engeren Sinne, sondern eine ganze *Modellklasse* dar. Deshalb spricht man auch oft in der Mehrzahl von "den LWR-Modellen". Die Gleichung (9.2) kann man auch in der Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(V_e + \rho \frac{dV_e}{d\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (9.3)$$

schreiben. Zu- und Abfahrten sowie Änderungen der Zahl der Fahrstreifen kann man durch die zusätzlichen Terme der allgemeinen Kontinuitätsgleichung (8.13) beschreiben, wobei auch in diesen Termen immer $V(x, t) = V_e(\rho(x, t))$ gilt.

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

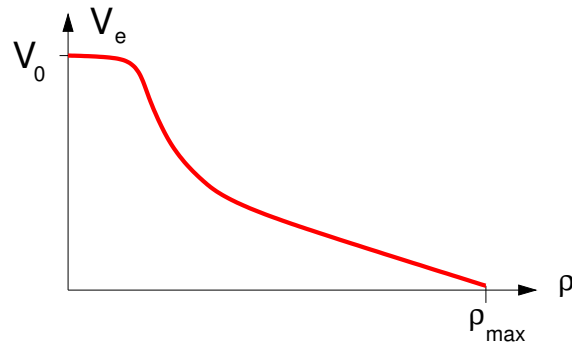


Figure 9.1.: Beispiel einer Gleichgewichtsrelation $V_e = f(\rho)$ für die Geschwindigkeit im Lighthill-Whitham-Richards Modell. Vergl. auch die empirischen Daten in Abb. 5.6

9.1. Ausbreitung kontinuierlicher Dichteschwankungen

Die partielle Differenzialgleichung (9.2) bzw. (9.3) ist eine **nichtlineare Wellengleichung**, welche die Ausbreitung sogenannter **kinematischer Wellen** beschreibt. Wir ermitteln nun die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Wellen bzw. von kontinuierlichen Dichteschwankungen allgemein für das LWR-Modell. Dazu setzen wir den allgemeinen Wellenansatz

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - ct)$$

in die Gleichung des LWR-Modells ein. Definieren wir mit $\rho'_0(x)$ die Ableitung der (von einer Variablen) abhängenden Funktion ρ_0 nach ihrem Argument, erhalten wir zunächst

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -c\rho'_0(x - ct),$$

und

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho'_0(x - ct)$$

Setzt man dies in Gl. (9.2) ein,

$$-c\rho'_0(x - ct) + \frac{dQ_e}{d\rho}\rho'_0(x - ct) = 0,$$

und “kürzt” den gemeinsamen Faktor $\rho'_0(x - ct)$, erhält man folgende einfache Gleichung für die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c(\rho)$ von Dichteschwankungen:

$$c = c(\rho) = \frac{dQ_e}{d\rho} = \frac{d(\rho V_e(\rho))}{d\rho}. \quad (9.4)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c(\rho)$ von Dichteschwankungen im festen Koordinatensystem hängt also von der Dichte ab und ist proportional zur Steigung der Fluss-Dichte

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

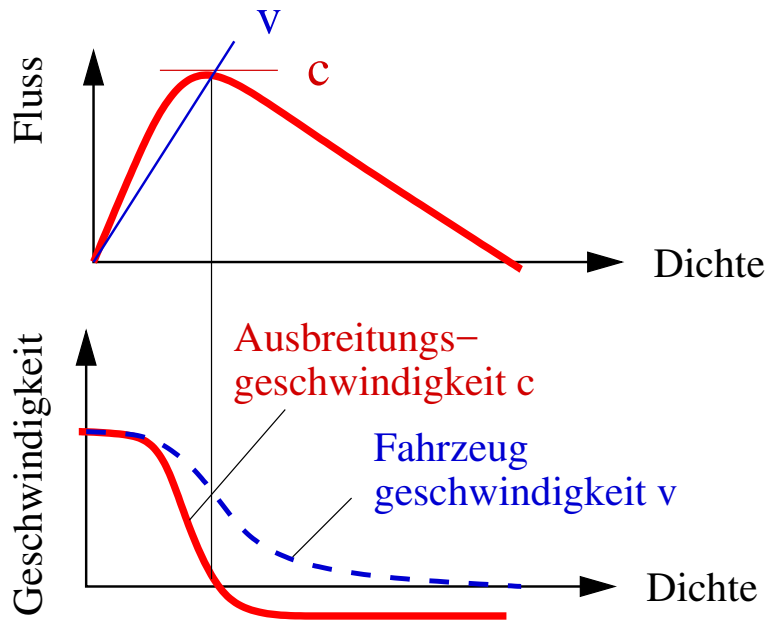


Figure 9.2.: Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \frac{dQ_e}{d\rho}$ von Dichteschwankungen im LWR-Modell im Vergleich mit der Fahrzeuggeschwindigkeit v .

Relation im Gleichgewicht (Fundamentaldiagramm). Insbesondere können sich Dichteschwankungen in Fahrtrichtung ausbreiten (freier Verkehr, linker Bereich des Fundamentaldiagramms, vgl. Abb. 9.2) oder auch gegen die Fahrtrichtung (gestauter Verkehr, rechter Bereich des Fundamentaldiagramms).

Wie hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit mit der Fahrzeuggeschwindigkeit V zusammen? Dazu betrachten wir die auf die Fahrzeuggeschwindigkeit bezogene *relative* Ausbreitungsgeschwindigkeit und setzen (9.4) ein:

$$c_{\text{rel}} = c(\rho) - V = c(\rho) - V_e(\rho) = \rho \frac{dV_e}{d\rho}.$$

Hier wurde die Produktregel $\frac{d}{d\rho}(\rho V_e(\rho)) = V_e(\rho) + \rho \frac{dV_e}{d\rho}$ berücksichtigt. Da $\frac{dV_e}{d\rho}$ für alle "vernünftigen" Fälle negativ oder höchstens Null ist (Abb. 5.6) gilt $c_{\text{rel}} \leq 0$. Aus Fahrersicht gesehen können sich Dichtestörungen also nur *rückwärts* ausbreiten. Dies hat in vielen mikroskopischen Modellen seine Entsprechung darin, dass die Fahrer nur auf das *Vorderfahrzeug*, nicht jedoch auf das *Hinterfahrzeug* reagieren.

9.2. Ausbreitung von Schockwellen

Gleichungen der Form (9.2) beschreiben Dichtewellen, deren Amplitude sich nicht verändert, die sich aber lokal unterschiedlich schnell fortbewegen, und zwar umso schneller, je

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

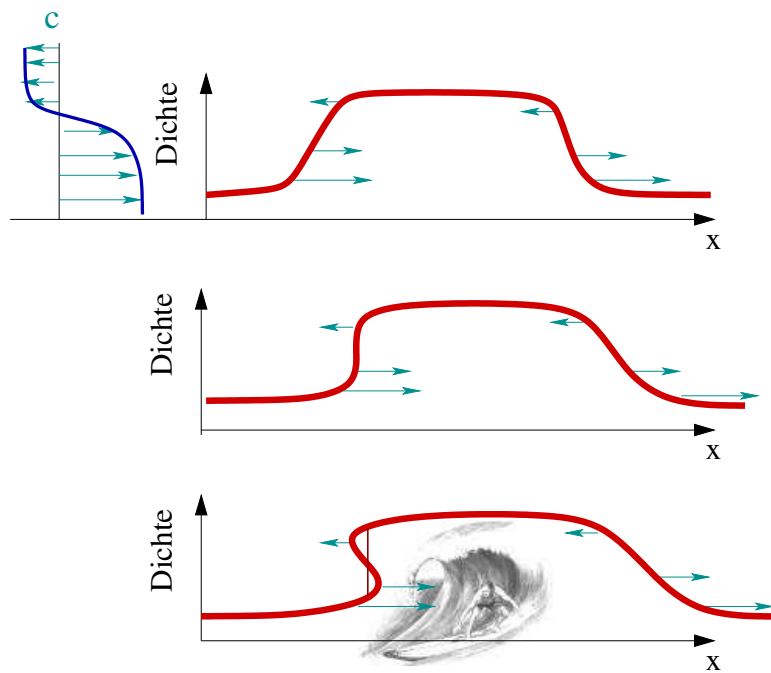


Figure 9.3.: Ausbildung von Schockfronten durch die Dichteabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeiten im LWR-Modell

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

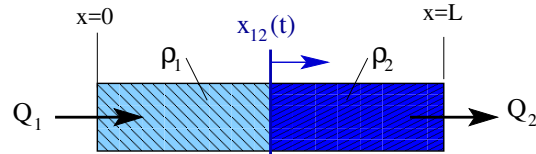


Figure 9.4.: Zur Herleitung der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schockwellen

geringer die lokale Dichte ist. Genauer gesagt, kann man sich die über den Ort aufgetragene Verkehrsdichte als einen Stapel vieler horizontale Schichten vorstellen, wobei sich jede Schicht mit der der jeweiligen Dichte entsprechenden Ausbreitungsgeschwindigkeit (9.4) unabhängig von den anderen bewegt: Die höheren Schichten bewegen sich also langsamer oder gar rückwärts (Abb. 9.3 oben). Bei einer “Stop-and-Go-Welle” bedeutet dies, dass die stromaufwärtige Wellenfront immer steiler und die stromabwärtige immer flacher wird (Abb. 9.3 Mitte). Aus Sicht des Autofahrers bedeutet dies, dass der Übergang freier Verkehr \rightarrow Stau immer abrupter wird, während die Fahrzeuge immer langsamer aus den Stau heraus beschleunigen.¹

Auf der stromaufwärtigen Seite kommt irgendwann der Zeitpunkt, in dem die Steigung $\frac{d\rho}{dx}$ unendlich wird und sich mathematisch die Wellen danach überschlagen” (Abb. 9.3 unten). Da ”sich überschlagende” Wellen natürlich sinnlos sind (an einer Stelle kann es zu einer gegebenen Zeit nur *eine* definierte Dichte geben), bildet sich stattdessen ein unstetiger Übergang aus, der in Abb. 9.3 unten durch die senkrechte Linie gekennzeichnet wird. Diese in allen LWR-Modellen entstehenden diskontinuierliche Dichtesprünge werden auch als **Schockwellen** bezeichnet. Sie entsprechen natürlich keinem realen Verkehrsgeschehen, so dass das Modell in dieser Hinsicht unrealistisch ist.

Während die Details der Übergänge frei \rightarrow gestaut und auch gestaut \rightarrow frei in LWR-Modellen unrealistisch sind,² beschreibt diese Modellklasse die Ausbreitung der Übergangszonen *als Ganzes* sehr realistisch, so dass diese Modelle für großräumige Betrachtungen dennoch nützlich sind. Insbesondere stellt die im Folgenden berechnete Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schockwellen auch eine gute Näherung für die Ausbreitung endlicher, realistischer Übergänge dar.

Wir betrachten einen unstetigen Übergang vom Zustand (ρ_1, Q_1) nach (ρ_2, Q_2) (vgl. Abb. 9.4). Nimmt man einen hinreichend kleinen ortsfesten Streckenabschnitt $0 \leq x \leq L$ um die Lage der Schockfront $x_{12}(t)$ an, so kann man die Flüsse und Dichten vor und nach der Front als konstant annehmen also

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_1 & \text{für } x \leq x_{12}, \\ \rho_2 & \text{für } x > x_{12}. \end{cases}$$

¹In der mathematischen Literatur wird diese Aufweichung der Wellenfront auch als *dispersion fan* bezeichnet.

²Die persönliche Erfahrung eines der Autoren zeigt, dass es bei großen Lauf- und Skilanglauf-Veranstaltungen nach dem Startschuss eine teils drastische Aufweichung der stromabwärtigen Front des vom Startfeld gebildeten “Riesenstaus” gibt; beim Kfz-Verkehr hingegen bleibt die Aufweichung eng begrenzt.

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

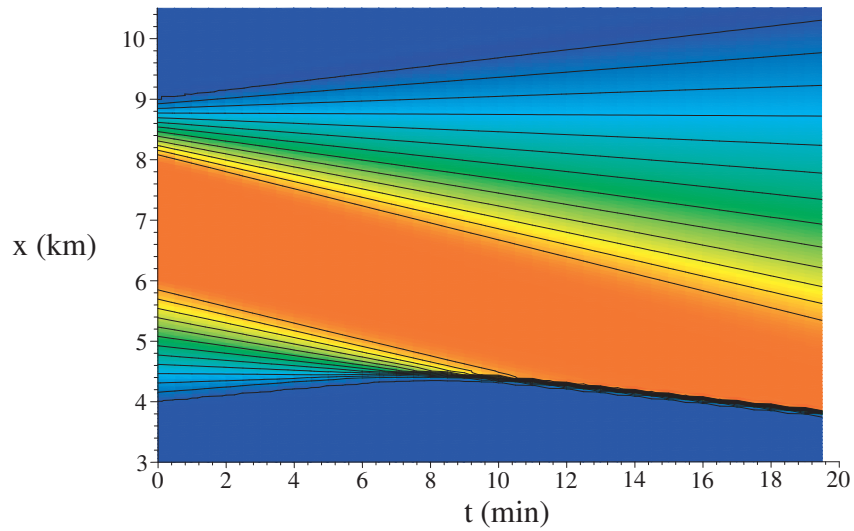


Figure 9.5.: Lösung des LWR-Modells mit einem Bereich gestauten Verkehrs (rot) mit freiem Verkehr (blau) davor und danach als Anfangsbedingung. Man sieht, dass sich beim Übergang freier Verkehr \rightarrow Stau eine Schockfront ausbildet, beim Übergang Stau \rightarrow frei aber nicht.

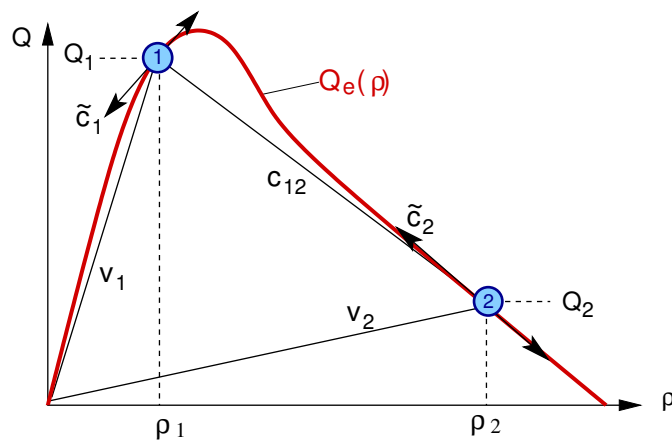


Figure 9.6.: Ablesen der Ausbreitungsgeschwindigkeiten $c(\rho) = \frac{dQ_e}{d\rho}$ von Dichteschwankungen, der Ausbreitungsgeschwindigkeiten c_{12} von Schockfronten (hier vom Zustand "1" in den Zustand "2") und der Fahrzeuggeschwindigkeiten $V_e = Q_e/\rho$ aus dem Fundamentaldiagramm $Q = Q_e(\rho)$.

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

Die Lage $x_{12}(t)$ der Schockfront *selbst* hingegen ist von der Zeit abhängig. Um nun die Geschwindigkeit $C_{12} = \frac{dx_{12}}{dt}$ zu berechnen, wird die Änderung $\frac{dn}{dt}$ der Fahrzeugzahl im Streckenabschnitt auf zweierlei Weise ausgedrückt.

(i) Aus der Fahrzeugerhaltung ergibt sich die Bilanzgleichung

$$\frac{dn}{dt} = Q_1 - Q_2.$$

(ii) Mit der Definition der Dichte kann man die Fahrzeugzahl ausdrücken durch

$$n = \rho_1 x_{12} + \rho_2 (L - x_{12}).$$

Ableiten nach der Zeit ergibt

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \frac{d}{dt} (\rho_1 x_{12} + \rho_2 (L - x_{12})) \\ &= (\rho_1 - \rho_2) \frac{dx_{12}}{dt} \\ &= (\rho_1 - \rho_2) C_{12} \end{aligned}$$

Vergleicht man die beiden Ausdrücke für $\frac{dn}{dt}$, erhält man schließlich

$$C_{12} = \frac{Q_2 - Q_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{Q_e(\rho_1) - Q_e(\rho_2)}{\rho_2 - \rho_1} \quad \text{Ausbreitung von Schockwellen.} \quad (9.5)$$

Diese Gleichung gilt nicht nur für die LWR-Gleichung, sondern ganz allgemein immer dann, wenn Übergänge zwischen zwei Verkehrszuständen 1 und 2 hinreichend abrupt sind, so dass man die Übergangszonen vernachlässigen kann.

9.2.1. Zusammenfassung: Fahrzeug- und Ausbreitungsgeschwindigkeiten

Eine wichtige Anwendung des Fundamentaldiagramms ist, dass man daraus im Rahmen des LWR-Modells alle relevanten Geschwindigkeiten herauslesen kann, wie in Abb. 9.6 gezeigt:

- Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c(\rho) = \frac{dQ_e(\rho)}{d\rho}$ von *Dichteschwankungen* ist durch die Tangentensteigung gegeben.
- Die Ausbreitungsgeschwindigkeit $C_{12} = (Q_2 - Q_1)/(\rho_2 - \rho_1)$ von *Schockfronten* ergibt sich aus der Steigung der Sekante der Punkte (ρ_1, Q_1) und (ρ_2, Q_2) (Dichten und zugehörige Gleichgewichtsflüsse $Q_1 = Q_e(\rho_1)$, $Q_2 = Q_e(\rho_2)$) beiderseits der Grenzen.
- Die Fahrzeuggeschwindigkeit $Q_e(\rho)/\rho$ selbst ist durch die Steigung der durch den Punkt $(\rho, Q_e(\rho))$ gehenden Ursprungsgeraden gegeben.

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

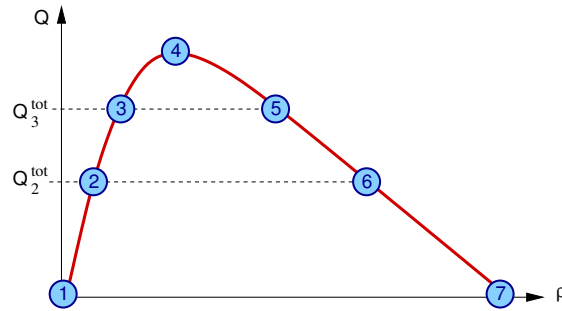


Figure 9.7.: Zur Verständnisfrage “Frontausbreitung”: Schematisches Fundamentaldiagramm mit verschiedenen, durch LWR-Modelle beschriebenen Verkehrszuständen.

Verständnisfrage:

In Abb. 9.7 sind verschiedene durch LWR-Modelle beschriebene Verkehrszustände durch die Zahlen 1-6 gekennzeichnet. Beschreiben Sie diese Verkehrszustände und folgende Übergänge (die erste Zahl bezieht sich jeweils auf den stromaufwärtigen Zustand, die nächsten auf weiter stromabwärts liegende):

2-3, 3-2, 3-6-3, 2-4, 3-5-2, 3-6-1-3, 6-3-1, 1-6.

Welche Übergänge würde ein im Übergangsbereich positionierter stationärer Detektor messen?

Verständnisfrage:

Gegeben sind drei Querschnitts-Detektoren D1, D2 und D3 im Abstand von je etwa einen km (Nummerierung in Verkehrsflussrichtung aufsteigend). D1 misst freien Verkehr mit etwa konstanten Fluss (z.B. nahe Punkt 3 in Abb. 9.7). D3 misst ebenfalls freien Verkehr, wobei der Fluss aber nur anfangs dem von D1 entspricht, dann fällt er plötzlich ab (etwa auf den Punkt 2 in Abb. 9.7) bevor er plötzlich maximal wird und dann wieder auf den Wert von D1 absinkt. Detektor 2 misst nur anfangs freien Verkehr, dann (etwa zur Zeit des Flussabfalls von D3) einen Verkehrszusammenbruch, welcher schließlich (etwas nach dem Zeitpunkt des Flussmaximums bei D3) wieder in freien verkehr übergeht. Zeichnen Sie qualitativ ein raumzeitliches Bild des Staus und interpretieren Sie die an den Detektoren D2 und D3 beobachteten Übergänge.

9.3. Das LWR mit dreieckigem Fundamentaldiagramm

Eine der schnellsten, realistischsten und flexibelsten Varianten des LWR-Modells ist das **LWR mit dreieckigem Fundamentaldiagramm** (vgl. Abb. 9.8), dessen kontinuierliche Version manchmal auch als **Section Based Model** bezeichnet wird, während die weitverbreitete raum- und zeitdiskrete Version (iterierte Abbildung) als **Cell-Transmission Model** (CTM) bezeichnet wird. Das dreieckige Fundamentaldiagramm (vgl. Abb. 9.8) lautet

$$Q_e(\rho) = \begin{cases} V_0 \rho & \text{falls } \rho \leq \rho_c \\ \frac{1}{T} [1 - \rho(s_0 + l)] & \text{falls } \rho_c < \rho \leq \rho_{\max}. \end{cases} \quad (9.6)$$

Die Bezeichnung "Section Based Model" hat es daher, da man dank seiner speziellen Eigenschaften – nur zwei feste Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Störungen, eine für freien und eine für gestauten Verkehr – die Kontinuitätsgleichung (8.8) nicht direkt für alle Orte x lösen muss, sondern sie auf Gleichungen für die Bewegung von Staufronten innerhalb und am Rande von homogenen Streckenabschnitten, sog. **road sections** reduzieren kann. Jede "road sections" ist stromabwärts durch Inhomogenitäten oder Engstellen begrenzt und ist stromaufwärts an andere "road sections" oder an stromaufwärtige Randbedingungen angebunden.

9.3.1. Modellparameter und Eigenschaften

Das LWR mit dreieckigem Fundamentaldiagramm (FD) hat folgende vier Modellparameter:

Parameter	Typ. Wert Autobahn	Typ. Wert Stadtverkehr
Wunschgeschwindigkeit V_0	110 km/h	50 km/h
Folgezeit T	1.4 s	1.2 s
Mindestabstand s_0	3 m	1.5 m
Fahrzeuglänge l	4.5 m	4.5 m

Wie bei allen makroskopischen Modellen sind die Parameter als **Fahrzeugflotten-Mittel** zu verstehen. Im Fundamentaldiagramm (9.6) tauchen die Parameter s_0 und l nur als Summe auf, so dass man sie als **effektive Fahrzeuglänge** $l_{\text{eff}} = s_0 + l$ zusammenfassen kann (siehe Abb. 9.8).

Das LWR mit dreieckigem FD hat folgende Eigenschaften:

1. Die Geschwindigkeiten von Störungen im freien Verkehr, also auf dem freien "Zweig" des Fundamentaldiagramms, sind durch

$$v_g^{\text{free}} = \left. \frac{dQ_e}{d\rho} \right|_{\rho < \rho_c} = V_0 \quad (9.7)$$

gegeben. Dichte- und Fluss-Schwankungen innerhalb freien Verkehrs pflanzen sich also mit derselben Geschwindigkeit wie die Fahrzeuge selbst fort, und diese

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

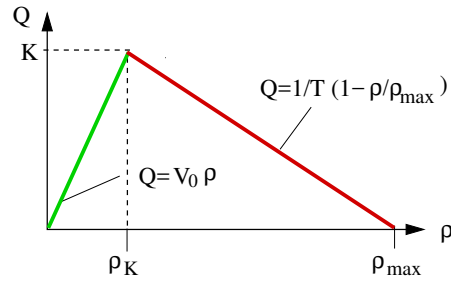


Figure 9.8.: Dreieckiges Fundamentaldiagramm.

Geschwindigkeit ist außerdem gleich der Wunschgeschwindigkeit. Im Rahmen dieser Modellklasse findet also im freien Verkehr keinerlei Wechselwirkung statt. (Andernfalls würden die Fahrer auf den Verkehr stromabwärts reagieren und sich damit Störungen relativ zur Fahrzeuggeschwindigkeit nach hinten fortpflanzen). Dies gilt auch für größere Störungen, so lange die Dichte nicht die Dichte ρ_c am Flussmaximum überschreitet.

- Die Geschwindigkeiten von Störungen im gebundenen Verkehr, also auf der “gestauten” Seite des Fundamentaldiagramms, sind ebenfalls durch eine konstante Geschwindigkeit,

$$v_g^{\text{cong}} := v_g = \left. \frac{dQ_e}{d\rho} \right|_{\rho > \rho_c} = -\frac{l_{\text{eff}}}{T}, \quad (9.8)$$

gegeben. Diese konstante, gegen die Fahrtrichtung gerichtete Ausbreitungsgeschwindigkeit ist in Übereinklang mit den Beobachtungen. Darüber hinaus gibt diese Gleichung die wesentlichen Einflussfaktoren dieser Geschwindigkeit an: Eine effektive Fahrzeuglänge pro Folgezeit. Ihr Wert beträgt in Europa etwa 15-16 km/h und in den USA 18-20 km/h.

- Das Flussmaximum, also die Kapazität K pro Fahrstreifen auf homogener Strecke, ergibt sich aus den gestauten und freien Zweigen des Fundamentaldiagramms so, dass keine Unstetigkeiten oder Hysterisis-Effekte auftreten, sind also durch den Schnittpunkt der Zweige gegeben:

$$K = \frac{1}{T + \frac{l_{\text{eff}}}{v_0}} = \frac{1}{T \left(1 + \frac{|v_g|}{v_0}\right)}. \quad (9.9)$$

Die Kapazität ist also *immer kleiner als das Inverse der mittleren Folgezeit T* . Sie steigt mit v_0 und sinkt mit T und l_{eff} (Abb. 9.9). Außerdem kann man zeigen, dass, bei gegebener Folgezeit, das dreieckige FD von allen Fundamentaldiagrammen die größte Kapazität aufweist.³

³Insbesondere bei den später behandelten Modellen mit dynamischer Geschwindigkeit kann sie durch Instabilitäten auch niedriger sein.

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

Figure 9.9.: Kapazität des LWR mit dreieckigem FD Modells als Funktion der Folgezeit T , Wunschgeschwindigkeit v_0 und effektive Länge l_{eff} . Die jeweils konstanten Größen wurden zu $v_0 = 120 \text{ km/h}$, $T = 1.2 \text{ s}$ und $l_{\text{eff}} = 8 \text{ m}$ gewählt.

Der dazugehörige Wert ρ_c der Dichte bei maximalen Fluss ist

$$\rho_c = \frac{1}{V_0 T + l_{\text{eff}}}. \quad (9.10)$$

4. Eine zentrale Eingangs- und Kontrollgröße bei realen, d.h. offenen Systemen ist der Verkehrsfluss, während sich die Verkehrsdichte aus dem Fluss ergibt. Nun ist die Umkehrfunktion des Fundamentaldiagramms $Q_e(\rho)$, also die Dichte-Fluss-Relation $\rho(Q)$, nicht eindeutig, da zu gegebenen Verkehrsfluss der Verkehr frei oder gebunden sein kann. Dementsprechend gibt es zwei Dichtewerte, die als **freier Zweig** $\rho_{\text{free}}(Q)$ und **gestauter Zweig** $\rho_{\text{cong}}(Q)$ der Dichte-Fluss-Relation bezeichnet werden. Im dreieckigem FD ergeben sich die Gleichgewichtsdichten zu

$$\rho_{\text{free}}(Q) = \frac{Q}{V_0}, \quad (9.11)$$

$$\rho_{\text{cong}}(Q) = \frac{1 - QT}{s_0 + l} = \rho_{\text{max}}(1 - QT). \quad (9.12)$$

Verständnisfrage:

Diskutieren Sie die Beobachtung, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit v_g von Dichteschwankungen in gebundenem Verkehr in den USA (18-20 km/h) etwas größer ist als in Europa (15-16 km/h). Betrachten Sie dabei bekannte Unterschiede der Eigenschaften der Fahrzeugflotte in diesen Regionen.

9.3.2. Modellierung homogener und inhomogener Richtungsfahrbahnen

In diesem Unterabschnitt werden einzelne Richtungsfahrbahnen betrachtet. Die Verallgemeinerung auf Netzwerke erfolgt in Kap. 9.3.4. Im Rahmen dieses Modells wird eine Richtungsfahrbahn in mehrere Streckenabschnitte bzw. *road sections* k (Index in stromabwärtiger Richtung steigend) aufgeteilt, wie in Abb. 9.11 dargestellt:

Eine **road section** k ist ein homogener Streckenabschnitt der Länge $L^{(k)}$ und Kapazität $K^{(k)}$, welcher stromabwärts durch eine *Streckeninhomogenität* oder **Engstelle** (engl. *bottleneck*) der Kapazität $K_B^{(k)}(t)$ begrenzt ist.

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

Typische Streckeninhomogenitäten/Engstellen sind beispielsweise

- Änderung der Zahl von Fahrstreifen (Reduktion, aber auch neue Fahrstreifen),
- Änderung von anderen globalen Eigenschaften wie Steigungen, die Kurvigkeit, Tempolimits sowie Engstellen im engeren Sinn wie enge Fahrstreifen bei Baustellen,
- Ein- oder Ausfahrten,
- Kreuzungen mit oder ohne Ampeln im Stadtverkehr.

Allgemein liegt eine Streckeninhomogenität immer dann vor, wenn stromabwärts *oder* stromaufwärts eine größere Kapazität herrscht. In diesem Sinne sind auch Erweiterungen mit neuen Fahrstreifen und Bereiche mit Abfahrten Engstellen (Abb. 9.11). Zur Modellierung ist es wichtig, zwei Arten von Engstellen/Inhomogenitäten zu unterscheiden:

- Bei **flusserhaltenden Engstellen** gehen alle Fahrzeuge des Abschnitts k in den stromabwärtigen Abschnitt $k + 1$ über und Abschnitt $k + 1$ erhält keine Fahrzeuge von anderswoher, es gibt also keine Zu- oder Abfahrten oder Kreuzungen. In Abb. 9.11 sind dies die Engstellen zwischen $k = 1$ und 2 sowie zwischen $k = 4$ und 5.
- Bei **nicht flusserhaltenden Engstellen** gibt es zusätzliche Quellen und Senken in Form von Zufahrten, Abfahrten oder Kreuzungen.

In jedem Fall ist die Engstellenkapazität $K_B^{(k)}(t)$ definiert durch den maximalen Verkehrsfluss *innerhalb* des Abschnitts k , welchen die Engstelle gerade noch verkraften kann. Eine Zeitabhängigkeit der Engstellenkapazität ermöglicht die Modellierung temporärer oder veränderlicher Engstellen wie Blockaden/Fahrstreifensperrungen durch Unfälle oder Lichtsignalanlagen. Bei flusserhaltenden Engstellen ist $K_B^{(k)}(t)$ direkt gleich dem Maximalfluss durch die Engstelle, bei Abfahrten ist es die gerade noch verkraftbare Summe von abfahrenden und auf der Hauptfahrbahn verbleibenden Flüssen. Bei Zufahrten hingegen ist es der maximale Fluss der Fahrzeuge auf der Hauptfahrbahn *ohne* die auf-fahrenden Fahrzeuge.

Da das LWR mit dreieckigem FD, wie alle LWR-Modelle, keinen Kapazitätsabfall (Abfall des Durchflusses) nach einem Verkehrszusammenbruch besitzt und stromabwärts von Staus immer der Maximalflusszustand herrscht, kann man die Engstellen-Kapazität völlig gleichwertig mittels der Flüsse durch die Engstelle *nach* einem Verkehrszusammenbruch definieren.⁴

⁴stromabwärts muss natürlich freier Verkehr herrschen, so dass an der Engstelle der Zustand "Ausfluss aus dem Stau" vorliegt.

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

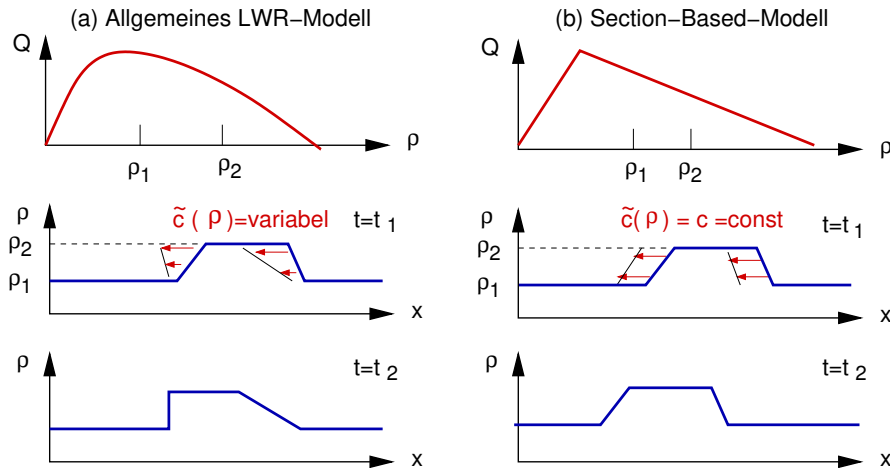


Figure 9.10.: Ausbreitung von Störungen in allgemeinen LWR-Modellen (linke Spalte) und im LWR mit dreieckigem FD (rechte Spalte). Gezeigt sind jeweils das Fundamentaldiagramm (oben), eine Anfangsstörung innerhalb gebundenen Verkehrs zur Zeit t_1 (Mitte) und das Aussehen der Störungen einige Zeit später, $t_2 > t_1$ (unten). Nur beim dreieckigen FD breiten sich Störungen mit konstanter Geschwindigkeit aus.

Verständnisfrage:

Wie sieht die Engstellenkapazität $K_B^{(k)}(t)$ aus

- (i) Bei einer Lichtsignalanlage (LSA, *vulgo* "Ampel") für Fußgängerüberquerungen in der Rot- und Grünphase (zwei Fahrstreifen),
- (ii) Bei einer unfallbedingten temporären Sperrung eines Fahrstreifens auf einer Richtungsfahrbahn mit drei Fahrstreifen.

Folgende spezielle Eigenschaften der Ausbreitung von Dichteschwankungen sind die Grundlage für die numerische Effizienz bei der Simulation des LWR mit dreieckigem FD:

1. Innerhalb der Bereiche "freier Verkehr" und "gebundener Verkehr" bleiben beliebige Dichteschwankungen in ihrer Form unverändert, während sie sich mit den Ausbreitungsgeschwindigkeiten V_0 (gleich der Wunschgeschwindigkeit) und v_g fortpflanzen (vgl. Abb. 9.10). Da $V_0 > 0$ und $v_g < 0$, wird damit der Bereich freier Verkehr nur von den stromaufwärtigen Randbedingungen (Zufluss) kontrolliert, während der gestaute Bereich ausschließlich vom stromabwärtigen Rand (Durchflusskapazität der dort vorhandenen Engstelle) dominiert wird (Abb. 9.12).
2. Eine eventuell vorhandene Grenze freier Verkehr \rightarrow gebundener Verkehr ist im-

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

mer unstetig und wird durch die Schockwellen-Ausbreitungsgeschwindigkeit (9.5) beschrieben. Diese kann Werte zwischen v_g und V_0 annehmen, also sowohl stromaufwärts als auch stromabwärts wandern.

3. Der Übergangsbereich gestaut \rightarrow frei ist entweder stationär und dann zwingend an einer Engstelle (Kapazitätsengpass), also am stromabwärtigen Ende einer *road section* positioniert, oder er breitet sich mit der festen Geschwindigkeit v_g stromaufwärts aus. Der letztere Fall kann nur vorkommen, falls der Engpass plötzlich verschwindet (grüne Ampel oder Räumung einer Unfallstelle). Da dann außerdem der Ausfluss identisch zum maximalen Ausfluss ist, kann man den Ausflussbereich einer laufenden stromabwärtigen Staufront sowohl dem freien als auch dem gebundenen Verkehr zuordnen. Damit ergibt sich folgende Schlussfolgerung:

Ordnet man den "Maximalfluss-Zustand" an der "Spitze" des Fundamental-diagramms dem gebundenen Verkehr zu, so kann es innerhalb jeder *road section* maximal einen Übergang frei \rightarrow gestaut geben. Ein möglicher Übergang gestaut \rightarrow frei ist *immer* stationär und befinden sich am stromabwärtigen Ende einer *road section*. Jede *road section* kann also genau einen der drei Zustände annehmen:

- (i) komplett frei,
- (ii) teilgestaut mit freiem Verkehr stromaufwärts vom gebundenen Verkehr,
- (iii) komplett verstaute.

Andere Möglichkeiten (wie mehrere Staus oder Übergänge gestaut \rightarrow frei) *gibt es nicht*.

Dynamik innerhalb eines Abschnitts bei gegebenen Zustand und Randbedingungen

Jede dieser drei Situationen lässt sich direkt durch die Randbedingungen und ggf. durch die Bewegungsgleichung einer Staufront beschreiben. Die explizite Lösung der Kontinuitätsgleichung des LWR-Modells (also einer partiellen Differenzialgleichung!) ist nicht nötig. Für alle Situationen sei zunächst der Zufluss $Q_{\text{in}}^{(k)}(t)$ am stromaufwärtigen Ende bei $x = x_{\text{up}}^{(k)}$ sowie der Ausfluss $Q_{\text{out}}^{(k)}(t)$ am stromabwärtigen Ende $x = x_{\text{down}}^{(k)}$ der Road Section k vorgegeben (vgl. Abb. 9.11), wobei, je nach Situation, eine der Bedingungen ggf. irrelevant sein kann.

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

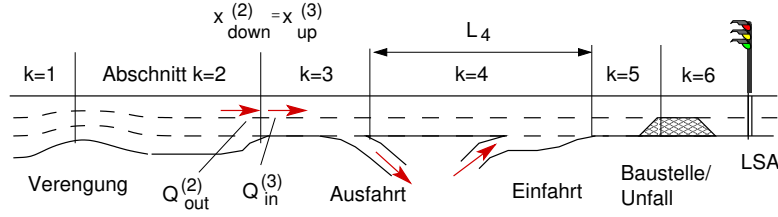


Figure 9.11.: Definitionen der Abschnitte im LWR mit dreieckigem FD (*Section Based Model*): Jede “Section” besteht aus einer homogenen Strecke mit einer Engstelle/Inhomogenität am stromabwärtigen Rand. Gezeigt sind Fahrstreifenanzahlreduktion ($k = 1$), Ausfahrt ($k = 2$), Einfahrt ($k = 3$) und eine lokale Fahrstreifenanzahlreduktion ($k = 4$). Die Engstellen $k = 1$ und $k = 4$ sind flusserhaltend, die beiden anderen nicht.

Zustand 1: freier Verkehr auf der gesamten Road Section

Hier ist die stromaufwärtige Randbedingung relevant und man erhält innerhalb des Abschnitts k zunächst den Fluss und mit (9.11) die Dichte:

$$\begin{aligned} Q_f^{(k)}(x, t) &= Q_{in}^{(k)}(t'), \quad t' = t - \frac{x - x_{up}^{(k)}}{V_0}, \\ \rho_f^{(k)}(x, t) &= \rho_{free} \left(Q_f^{(k)}(x, t) \right). \end{aligned} \quad (9.13)$$

Zustand 2: gestauter Verkehr auf der gesamten Road Section

Hier ist die stromabwärtige Randbedingung relevant und man erhält innerhalb des Abschnittes zunächst den Fluss und mit (9.12) die Dichte:

$$\begin{aligned} Q_c^{(k)}(x, t) &= Q_{out}^{(k)}(t'), \quad t' = t - \frac{x_{down}^{(k)} - x}{|v_g|}, \\ \rho_c^{(k)}(x, t) &= \rho_{cong} \left(Q_c^{(k)}(x, t) \right). \end{aligned} \quad (9.14)$$

Zustand 3: freier und gestauter Verkehr

Hier sind beide Randbedingungen relevant und für die freien und gebundenen Anteile gelten die jeweiligen obigen Gleichungen. Zusätzlich gilt für die Position $x^*(t)$ des Übergangs frei \rightarrow gestaut die Schockwellenausbreitungsgeschwindigkeit (9.5), welche hier die Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung für x^* annimmt:

$$\begin{aligned} \frac{dx^*}{dt} &= \frac{Q_2 - Q_1}{\rho_{cong}(Q_2) - \rho_{free}(Q_1)}, \\ Q_2 &= Q_c^{(k)}(x^*, t) = Q_{out}^{(k)} \left(t - \frac{x_{down}^{(k)} - x^*}{|v_g|} \right), \\ Q_1 &= Q_f^{(k)}(x^*, t) = Q_{in}^{(k)} \left(t - \frac{x^* - x_{up}^{(k)}}{V_0} \right). \end{aligned} \quad (9.15)$$

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

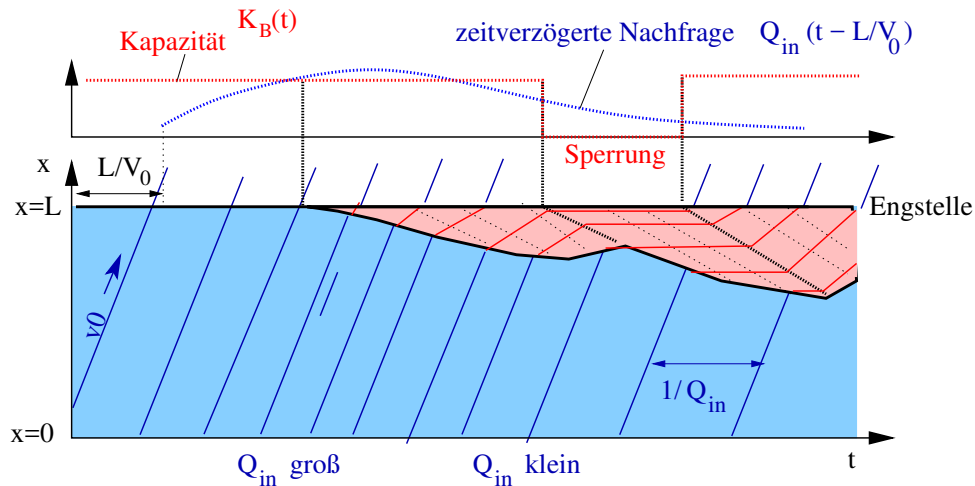


Figure 9.12.: Verkehrsdynamik eines mit dem LWR mit dreieckigem FD modellierten Abschnitts der Länge L . Dargestellt sind die Bereiche freien bzw. gebundenen Verkehrs (blaue bzw. rote Flächen), einige Fahrzeugtrajektorien (blaue bzw. rote durchgezogene Linien), die Ausbreitung von Störungen im Stau (punktirierte Linien) sowie die zeitlich veränderliche Kapazität $Q_{out}(t)$ und die zeitverzögerte Nachfrage $Q_{in}(t)$ (rote bzw. blaue punktirierte Linien im oberen Koordinatensystem). Ein Stau bildet sich, wenn die blaue die rote punktirierte Linie von unten nach oben schneidet.

Abbildung 9.12 verdeutlicht die allgemeinste Situation mit zeitlich veränderlicher Nachfrage bzw. Zufluss $Q_{in}(t)$ (Rush hour) und einem Ausfluss, welcher nur durch die (ebenfalls variable) Engstellenkapazität K_B mit temporärer Streckensperrung beschränkt ist⁵: $Q_{out}(t) = K_B(t)$. Sobald bei anfangs freiem Verkehr die zeitversetzte Nachfrage $Q(L, t) = Q(0, t - L/v_0) = Q_{in}(t - L/v_0)$ größer wird als die Kapazität $K_B(t)$, bildet sich ein Stau. Die Geschwindigkeit der entstehenden Staufront hängt nun gemäß Gl. (9.15) von den zeitverzögerten Werten der Nachfrage und der Kapazität ab. Zunächst sinkt die Nachfrage bei konstanter Engstellenkapazität, so dass die sich anfänglich entgegen die Fahrtrichtung bewegende Staufront schließlich ihre Richtung umkehrt, der Stau sich also aufzulösen beginnt. Die dann einsetzende Vollsperrung ($K_B(t) = 0$) führt – entsprechend zeitverzögert – noch einmal zu einem Anwachsen, ehe die Aufhebung der Sperrung und die nun geringe Nachfrage nach einer der Staulänge entsprechenden Verzögerungszeit zu einer raschen Auflösung führen.

⁵Stromabwärts der Engstelle herrscht also freier Verkehr, vgl. den nächsten Unterabschnitt.

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

Dynamik der Randbedingungen und Zustände

Die Randbedingungen einer jeden Road Section vermitteln die Kopplung der einzelnen Abschnitte untereinander und führen letztendlich zu den bei der Betrachtung der Dynamik innerhalb einer *road section* als gegeben angenommenen Randbedingungen $Q_{\text{in}}(t)$ und $Q_{\text{out}}(t)$. Nur der stromaufwärtige Rand des ersten Abschnitts bei $x_{\text{up}}^{(1)}$ und der stromabwärtige Rand $x_{\text{down}}^{(K)}$ des letzten Abschnittes werden extern vorgegeben. Die Kopplung am Übergang der Abschnitte k und $k+1$ am Ort $x_{\text{down}}^{(k)} = x_{\text{up}}^{(k+1)}$ geschieht nach der **Supply-Demand-Methode** (für die Bezeichnungen vgl. Abb. 9.12):

- Das Angebot (*supply*) S_k ist durch die aktuellen Kapazität $K_{\text{B}}^{(k)}$ der Engstelle und ggf. durch einen Rückstau im nächsten stromabwärtigen Abschnitt $k+1$ bestimmt:

$$S_k(t) = \begin{cases} \min \left(K_{\text{B}}^{(k)}(t), Q^{(k+1)}(x_{\text{up}}^{(k+1)}, t) \right) & \text{Abschnitt } k+1 \text{ vollständig zugestaut,} \\ K_{\text{B}}^{(k)}(t) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (9.16)$$

- Die Nachfrage (*demand*) D_k ist durch die Verkehrsdichte am stromabwärtigen Ende des aktuellen Abschnitts bestimmt:

$$D_k(t) = \begin{cases} Q^{(k)}(x_{\text{down}}^{(k)}, t) & \text{Abschnitt } k \text{ vollständig staufrei,} \\ Q_{\text{max}}^{(k)} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (9.17)$$

- Die neuen Randbedingungen sind gegeben durch⁶

$$Q_{\text{out}}^{(k)}(t) = Q_{\text{in}}^{(k+1)}(t) = \min(S_k(t), D_k(t)) \quad (9.18)$$

- Außerdem ändern sich ggf. die Zustände: Falls $D_k(t) > S_k(t)$ und Abschnitt k bisher vollständig frei war (Zustand 1), entsteht dort ein neuer Stau (Zustand 3). Falls $D_k(t) < S_k(t)$ und Abschnitt $k+1$ bisher vollständig verstaut war (Zustand 2), ist dieser Abschnitt nun nur noch teilverstaut (Zustand 3). Ein Zustand 3 geht in 1 bzw. 2 über, wenn die Staugrenze x^* das stromabwärtige bzw. stromaufwärtige Ende des Abschnitts erreicht, vgl. Abb. 9.12.

Besonders einfach wird all dies im Falle von lichtsignalgesteuerten Stadtverkehr, wenn man zunächst die Nebenstrecken außer Acht lässt und die Abschnitte der Hauptstrecke jeweils dasselbe Fundamentaldiagramm aufweisen. Diese, in Abb. 9.16 gezeigte Situation lässt sich durch drei Road Sections darstellen, wobei die beiden Ampeln jeweils die Engstellen der beiden ersten Abschnitte darstellen. Die Kapazitäten an den Ampel-Engstellen sind durch

$$K_{\text{B}}^{(k)}(t) = \begin{cases} K & \text{Ampel } k \text{ ist grün} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

⁶Zur Bestimmung von Nachfrage und Angebot sind nur Randbedingungen aus der Vergangenheit notwendig; ein Selbstbezug tritt daher nicht auf

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

gegeben. Der letzte Abschnitt eine hinreichend große Kapazität hat, so dass er nie verstaubt wird.

Im Allgemeinen können an den Abschnittsgrenzen auch verschiedenartigste Flüsse hinzukommen oder abzweigen und durch i.A. naheliegende Verallgemeinerungen der Minimums-Bedingungen berücksichtigt werden. Damit kann z.B. der Verkehr einer gesamten Stadt effizient simuliert werden: Jeder Abschnitt zwischen zwei Kreuzungen oder Engstellen ist eine "Road Section".

9.3.3. Beispiele

Abbildung 9.13 Zeigt das allgemeine Prinzip der durch das dreieckige FD beschriebenen Stauausbreitungsdynamik: Nach dem *Supply-Demand*-Prinzip herrscht innerhalb der Engstelle der "Maximalflusszustand", d.h. der Fluss ist gleich der (reduzierten) Kapazität K_2 und die Dichte gleich der dazugehörigen kritischen Dichte ρ_{K_2} (Zustand ③ in Abb. 9.13). Im eigentlichen Sinne gestauten Verkehr gibt es hingegen nur *stromaufwärts* der Engstelle. Da die Engstelle und damit der Übergang Stau \rightarrow Maximalflusszustand ortsfest sind, herrscht auch im Stau derselbe Verkehrsfluss K_2 . Diesem Fluss entspricht hier aber eine deutlich höhere Dichte, welche durch $\rho_{\text{cong}}(K_2)$ gegeben ist (Zustand ②). Da hier die Nachfrage $Q_{\text{in}} > K_2$ angenommen wurde (weshalb der Stau überhaupt erst entstanden ist), bewegt sich die stromaufwärtige Staufront ① \rightarrow ② mit der Geschwindigkeit

$$v_g = \frac{Q_2 - Q_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{K_2 - Q_{\text{in}}}{\rho_{\text{cong}}(K_2) - Q_{\text{in}}/v_{01}}$$

stromaufwärts. In Abb. 9.13 ist diese Geschwindigkeit durch die Steigung der grünen gestrichelten Gerade gegeben. Schließlich ist der Übergang ③ \rightarrow ④ am Ende der Engstelle ebenfalls ortsfest, also ist auch im Ausflussbereich der Verkehrsfluss durch K_2 gegeben. Allerdings entspricht dies hier gemäß dem freien Zweig des Fundamentaldiagramms einer geringeren Dichte $\rho_{\text{out}} = K_2/v_{01}$ mit v_{01} der Maximalgeschwindigkeit (Wunschgeschwindigkeit) außerhalb der Engstelle.

Im Folgenden nun, nach Komplexität geordnet, einige konkrete Beispiele der Stauausbreitung an Engstellen:

(1) Warteschlange an einer Lichtsignalanlage (LSA)

Gegeben ist eine Situation mit konstantem Zustrom $Q_{\text{in}} < K$ bei $x = 0$ und einer LSA bei $x = L$, welche anfangs ($t = 0$) grün ist, zur Zeit t_1 nach Rot und zum Zeitpunkt t_2 wieder nach Grün schaltet. Anfänglich herrscht freier Verkehr. Außerdem gibt es während der gesamten Zeit keinen Rückstau auf dem Abschnitt stromabwärts der LSA.

Lösung: Da es nach Voraussetzung keinen Rückstau gibt, ist das Angebot S durch die "Engstellen-Kapazität" der LSA gegeben:

$$S(t) = K_B(t) = \begin{cases} K = \frac{1}{T + \frac{1}{v_0}} & t \leq t_1 \text{ oder } t > t_2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

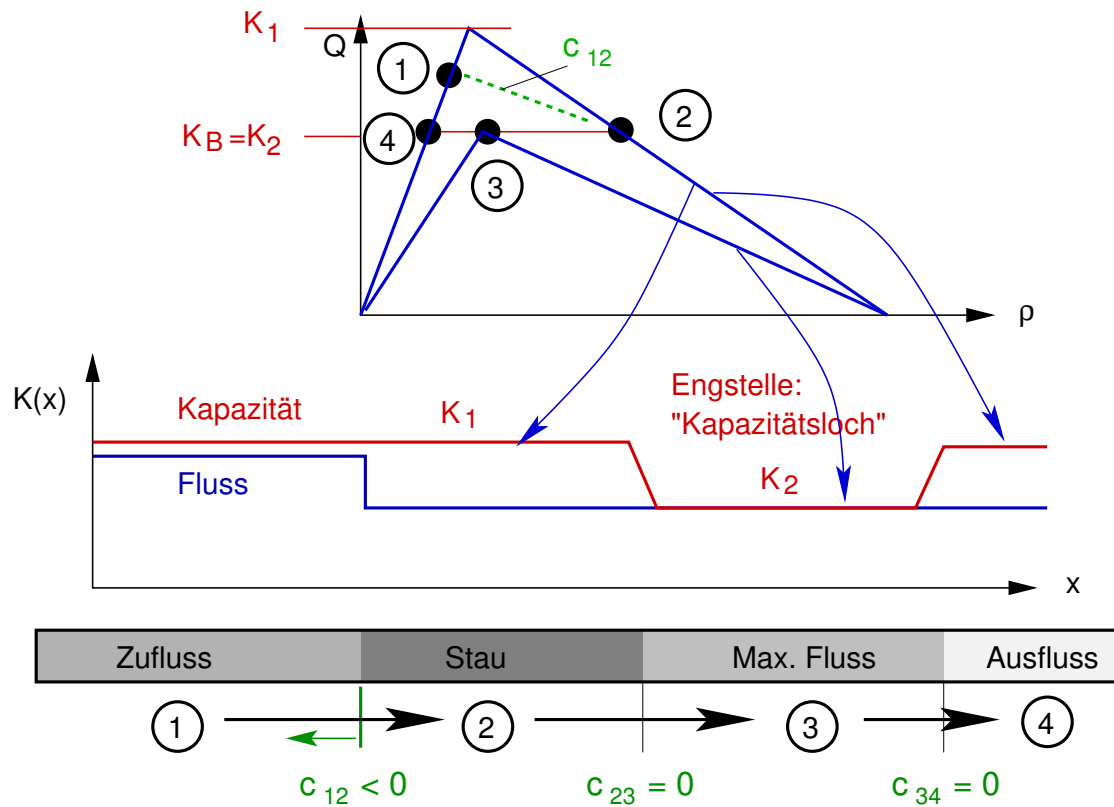


Figure 9.13.: Stauausbreitung im LWR mit dreieckigem FD: Gezeigt ist der Fall einer flusserhaltenden Engstelle, bei der sich innerhalb der Engstelle das Fundamentaldiagramm ändert und sich insbesondere die Kapazität von K_1 auf K_2 reduziert. Ein Fahrzeug durchläuft nacheinander die mit ① - ④ auf dem Streckenabschnitt und im Fundamentaldiagramm bezeichneten Zustände. Der Übergang ① \rightarrow ② bewegt sich stromaufwärts, während die anderen Übergänge stationär sind.

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

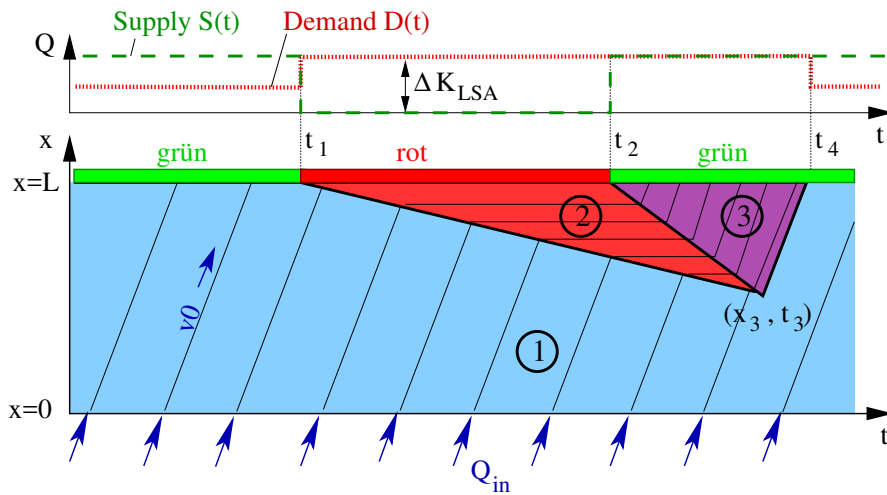


Figure 9.14.: Modellierung einer Warteschlange vor einer Lichtsignalanlage gemäß dem Beispiel in Abschnitt 9.3.3. Unterschieden werden die Bereiche freier Verkehr (hellblau), gestauter Verkehr bzw. Warteschlange (rot) und Ausfluss aus dem Stau (violett). Das obere Koordinatensystem veranschaulicht die Berechnung der Randbedingungen mit dem *Supply-Demand* Modell. Die Fahrzeugtrajektorien (schwarze Linien) dienen nur zur Veranschaulichung.

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

- **Phase 1: LSA ist grün, freier Verkehr**, $t \leq t_1$. Der Abschnitt ist anfangs staufrei, also ist der *demand* durch $D = Q_{\text{in}}$ gegeben. Da $D < S$ bleibt dieser Zustand bis $t = t_1$ unverändert bestehen.
- **Phase 2: LSA ist rot, Bildung einer Warteschlange**, $t_1 < t \leq t_2$: Nun ist $S = 0$ und damit $D > S$, die *road section* geht also in den Zustand “teilverstaute” über und die stromabwärtige Randbedingung ist durch $Q_{\text{out}} = 0$ gegeben. Gl. (9.15) für die Staufront (stromaufwärtiger Bereich 1, stromabwärtiger 2, vgl. Abb. 9.14) wird damit

$$\frac{dx^*}{dt} := c_{12} = \frac{-Q_{\text{in}}}{\rho_{\text{cong}}(0) - \rho_{\text{free}}(Q_{\text{in}})}$$

und mit $\rho_{\text{cong}}(0) = \rho_{\text{max}} = 1/l_{\text{eff}}$ und $\rho_{\text{free}}(Q_{\text{in}}) = Q_{\text{in}}/V_0$ schließlich

$$c_{12} = \frac{dx^*}{dt} = \frac{-Q_{\text{in}}}{\rho_{\text{max}} - \frac{Q_{\text{in}}}{V_0}}$$

Ohne Zufluss ($Q_{\text{in}} = 0$) gilt $c_{12} = 0$, da sich dann natürlich auch bei roter Ampel kein Stau bildet. Bei maximalen Zufluss, also nach Gl. 9.9 $Q = K = 1/(T + l_{\text{eff}}/V_0)$, gilt hingegen (unter Ausnutzung von $\rho_{\text{max}} = 1/l_{\text{eff}}$)

$$c_{12}^{\text{max. Zufluss}} = \frac{-l_{\text{eff}}}{T} = v_g.$$

Die Staufront-Geschwindigkeit bei maximalen Fluss ist also gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen innerhalb gestauter Zustände!

- **Phase 3: LSA ist grün, Stauauflösung**, $t_2 < t \leq t_3$: Wegen der Warteschlange vor der LSA ist die Nachfrage nun durch $D(t) = Q_{\text{max}} = K$ gegeben. Das Angebot $S(t)$ ebenfalls, so dass die Randbedingung $Q_{\text{out}} = K$ gilt. Der Übergang “stehender Verkehr” → maximaler Fluss” breitet sich – wie alle Veränderung innerhalb des gestauten Bereiches und der Maximalflusszustand kann ja als Grenzfall davon interpretiert werden – mit der Gruppengeschwindigkeit v_g stromaufwärts aus. Es gibt also nun zwei Übergänge:
 - * Der Übergang 1 → 2 (frei → gestaut) am Ort $x_1(t) = L + c_{12}(t - t_1)$
 - * Der Übergang 2 → 3 (gestaut → maximaler Fluss) am Ort $x_2(t) = L + v_g(t - t_2)$ mit

$$c_{23} = \frac{Q_3 - Q_2}{\rho_3 - \rho_2} = \frac{Q_{\text{max}} - 0}{\rho_c - \rho_{\text{max}}} = -\frac{1}{\rho_{\text{max}}T} = -v_g.$$

Zur Zeit

$$t_3 = \frac{c_{12}t_1 - v_g t_2}{c_{12} - v_g} = t_1 + \left(\frac{-v_g}{c_{12} - v_g} \right) (t_2 - t_1)$$

treffen sich die beiden Staufronten und die Warteschlange hat sich am Ort

$$x_3 = L + v_g(t - t_2)$$

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

aufgelöst (man beachte, dass v_g und c_{12} negativ sind, der Ort befindet sich also stromaufwärts der LSA, wie es auch sein muss.)

- **Phase 4: Auflösung des Maximalfluss-Zustandes**, $t_3 < t \leq t_4$: Mit $Q_2 = Q_{\max}$ liefert Gl. (9.15) für die Geschwindigkeit der stromaufwärtigen Front nun

$$c_{13} = \frac{Q_{\max} - Q_{\text{in}}}{\rho_{\text{cong}}(Q_{\max}) - \rho_{\text{free}}(Q_{\text{in}})} = V_0$$

Für $0 \leq x < x_3 + V_0(t - t_3)$ herrscht damit der ursprüngliche Zustand freien Verkehrs, $Q(x, t) = Q_{\text{in}}$ und $\rho(x, t) = Q_{\text{in}}/V_0$, während der Maximalflusszustand im Bereich $x_3 + V_0(t - t_3) \leq x < L$ gilt. Diese Phase ist beendet, wenn die Front den Ort der LSA trifft, $x_3 + V_0(t_4 - t_3) = L$ und damit

$$t_4 = t_3 + \frac{x_3}{V_0}.$$

Gesamte Wartezeit durch LSA

Ermitteln Sie die durch eine LSA-Rotphase verursachte Gesamt-Wartezeit aller betroffenen Fahrzeuge in Abhängigkeit der Dauer $\tau_r = t_2 - t_1$ des Rotlichts. Nehmen Sie dabei einen konstanten Zufluss Q_{in} und einen vollständiger Abfluss der LSA-Warteschlange vor jeder Rotphase an.

[Lösung: Gesamt-Wartezeit = $\frac{1}{2}Q_{\text{in}}\tau^2(-v_g/(c - v_g))$]

- (2) **Zufahrt** Nun sei ein Streckenabschnitt mit einer Zufahrt (konstante Verkehrsbelastung Q_{rmp}) als stromabwärtige Begrenzung gegeben. Der Zufluss an der stromaufwärtigen Begrenzung der Hauptfahrbahn (I Fahrstreifen) beträgt pro Fahrstreifen

$$Q_{\text{in}} = \frac{Q_{\text{in}}^{\text{tot}}}{I} = \begin{cases} Q_0 & t < t_{\text{beg}} \text{ oder } t > t_{\text{end}} \\ Q_{\text{rush}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei sei beim Zufluss Q_0 permanente Staufreiheit möglich, während es während der ‘‘Rush hour’’ beim größeren Fluss Q_{rush} zum Stau kommt.

Lösung:

- **Phase 1: Freier Verkehr**, $t < t_1$ Nach der allgemeinen Definition in diesem Abschnitt ist die Kapazität K durch den Gesamtfluss auf der Hauptfahrbahn (HFB) gegeben, welcher gerade noch nicht zum Stau führt. Da die Fahrzeuge der Zufahrt ebenfalls durch die stromabwärtige Begrenzung des Abschnittes fahren (die *road section* schließen ja die Inhomogenität, also hier die Zufahrt, komplett ein!), gilt daher

$$K = IQ_{\max} - Q_{\text{rmp}},$$

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

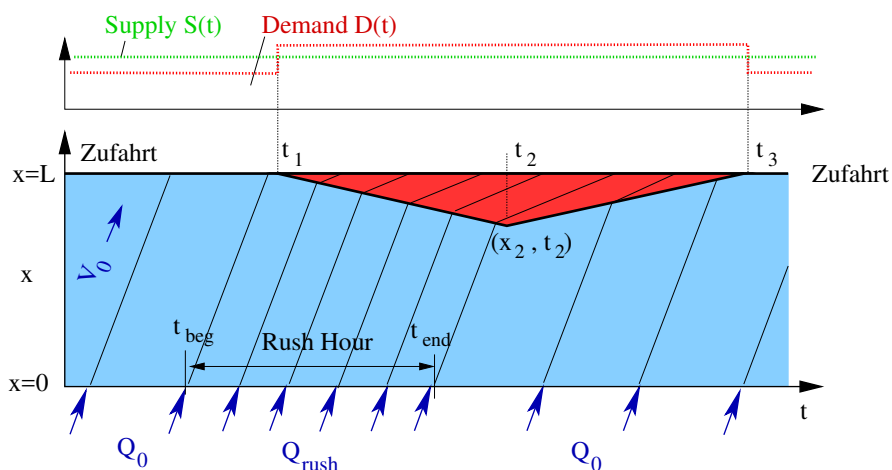


Figure 9.15.: Modellierung eines durch Überlastung verursachten Verkehrszusammenbruchs an einer Zufahrt. Im Gegensatz zum LSA-Beispiel ist hier die Kapazität der Störstelle (d.h. der Rampenfluss) konstant und der Stau wird durch eine erhöhte Verkehrsbelastung auf der Hauptfahrbahn (*rush hour*) provoziert. Außerdem stehen die Fahrzeuge im Gegensatz zum LSA-Beispiel im Stau nicht.

Für den Zufluss in dieser Phase muss also $Q_0 < K/I = Q_{\max} - Q_{\text{rmp}}/I$ gelten. Diese Phase geht zu Ende, wenn der höhere Zufluss nach einer zusätzlichen Zeitspanne L/v_0 die Stelle der Zufahrt erreicht hat⁷, also

$$t_1 = t_{\text{beg}} + \frac{L}{V_0}.$$

– **Phase 2: Ausbreitung eines Staus**, $t_1 \leq t < t_2$

Für den Fluss während der Rush hour gilt $Q_{\text{rush}}^{\text{tot}} = IQ_{\text{rush}} > K$. Damit bricht der Verkehr an der Zufahrt zusammen. Der Bereich gestauten Verkehrs stromaufwärts ist gegeben durch

$$Q_{\text{cong}} = \frac{K}{I} = Q_{\max} - \frac{Q_{\text{rmp}}}{I}, \quad \rho_{\text{cong}} = \rho_{\max}(1 - Q_{\text{cong}}T), \quad V_{\text{cong}} = \frac{Q_{\text{cong}}}{\rho_{\text{cong}}}.$$

Der Bereich freien Verkehrs stromaufwärts ist hingegen gegeben durch

$$Q_{\text{free}} = Q_{\text{rush}}, \quad \rho_{\text{free}} = \frac{Q_{\text{rush}}}{V_0}, \quad V_{\text{free}} = V_0.$$

⁷Dies gilt genau nur für eine vernachlässigbare Längen L_{rmp} der Beschleunigungsspur, in hinreichend guter Näherung aber auch für endliche Rampenlängen.

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der stromaufwärtigen Staufront in Phase 2 ist genau wie in der Ampelaufgabe gegeben durch

$$c_2 = \frac{Q_{\text{cong}} - Q_{\text{rush}}}{\rho_{\text{max}}(1 - Q_{\text{cong}}T) - \frac{Q_{\text{rush}}}{V_0}}$$

Diese Phase endet, wenn der Übergang $Q_{\text{rush}} \rightarrow Q_0$ des Verkehrsflusses am Ende der *rush hour* (Zeit t_{end}) die Staufront erreicht. Die Schnittbedingung

$$x_2 := V_0(t_2 - t_{\text{end}}) = L + c_2(t_1 - t_{\text{beg}})$$

liefert

$$t_2 = \frac{L - c_2 t_1 + V_0 t_{\text{end}}}{V_0 + c_2}$$

- **Phase 3: Stauauflösung**, $t_2 < t \leq t_3$: Nun ist der Bereich stromaufwärts der Staufront durch $Q_{\text{free}} = Q_0$ und $\rho_{\text{free}} = Q_0/V_0$ gegeben und die entsprechende neue Geschwindigkeit c_3 der Staufront ergibt sich aus obiger Gleichung für c_2 , wenn man Q_{rush} durch Q_0 ersetzt. Da $Q_0 < Q_{\text{cong}}$ und der Nenner positiv ist, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit c_3 selbst positiv. Die stromaufwärtige Front verschiebt sich also in Richtung Rampe, bis sie zur Zeit

$$t_3 = t_2 + \frac{L - x_2}{c_3}$$

diese erreicht und der Stau sich auflöst.

- die **Phase 4** für $t > t_4$ ist identisch zur Phase 1.

(3) **Reduktion der Fahrstreifenzahl von 3 auf 2** zu tun.

Martin: Kontinuitätsgl/Uebergänge: Fahrstreifensummen Q_{tot} etc!

9.3.4. Modellierung von Netzen im Section-Based-Model

Verständnisfrage:

Ermitteln Sie ρ_c , Q_{max} und ρ_{max} aus den Parametern des “dreieckigen” Fundamentaldiagramms (9.6).

Verständnisfrage:

Ermitteln Sie die Geschwindigkeiten der verschiedenen Staufronten (1) – (6) in Abb. 9.16 für ein durch $v_0 = 54$ km/h, $T = 1.4$ s, $l = 5$ m und $s_0 = 2$ m gegebenes Fundamentaldiagramm.

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

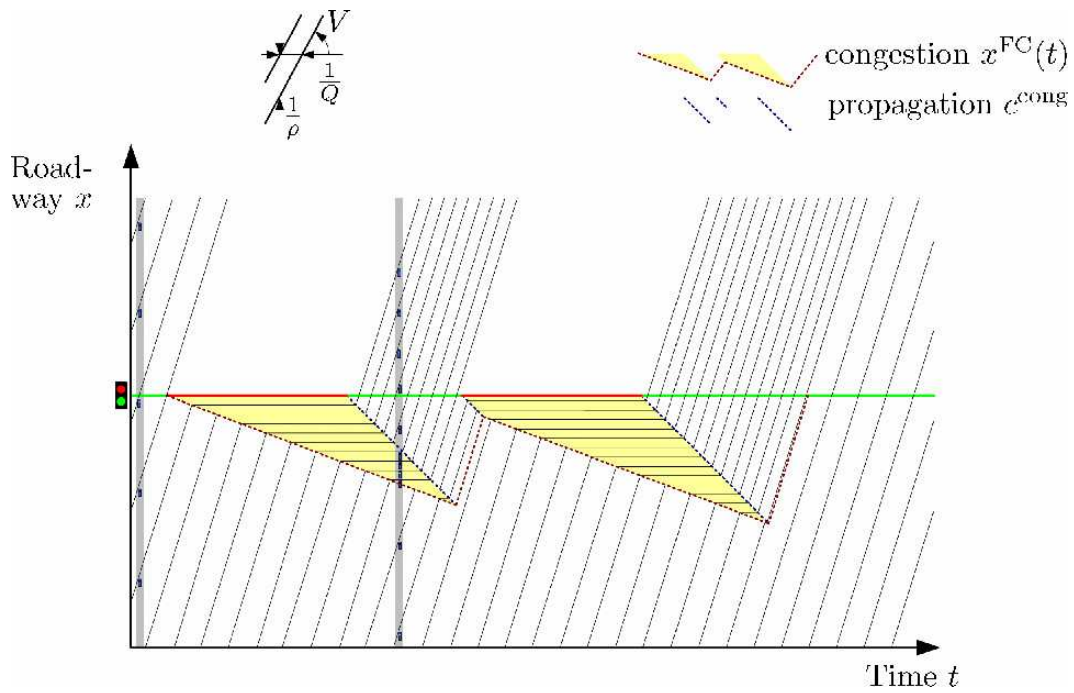


Figure 9.16.: Verkehrsdynamik einer lichtsignalgesteuerten Stadtverkehrsstraße mit zwei ampelgesteuerten Kreuzungen unter Verwendung des LWR mit dreieckigem FD. Die nummerierten Übergänge zwischen verschiedenen dynamischen Bereichen sind (1)=Haltelinie vor roter Ampel, (2) und (3)=stromaufwärtiges Ende der Warteschlange vor roter Ampel ohne bzw. mit Zufluss, (4)=stromabwärtiges Ende einer sich bei "Grün" auflösenden Schlange, (5) Übergang frei-maximalen Flusszustand, (6) Übergänge maximaler Flusszustand-leere Straße.

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

Verständnisfrage:

Begründen Sie, warum die Geschwindigkeit (9.5) einer Übergangszone frei \rightarrow gestaut (Staufront) in LWR mit dreieckigem FD Werte zwischen v_g und V_0 annehmen. Unter welchen Bedingungen werden die Extremwerte realisiert?

Verständnisfrage:

Die Störungen des LWR mit dreieckigem FD haben für Dichten $\rho < \rho_c$ alle die Geschwindigkeit v_0 (vgl. Gl. (9.7)). Was bedeutet dies für die Reaktion der Fahrer untereinander?

Verständnisfrage:

Die Geschwindigkeit von Dichteänderungen in gebundenen Verkehr ist durch $v_g = -l_{\text{eff}}/T$ gegeben. Ferner ist die Folgezeit T in etwa so groß wie die Reaktionszeit. Veranschaulichen Sie sich die Gleichung für v_g am Beispiel des Anfahrens der hinter einer Ampel stehenden Fahrzeuge, nachdem die Ampel auf "Grün" gesprungen ist.

Aufgabe:

Wie groß ist die Streckenkapazität beim LWR mit dreieckigem FD unter der Annahme, dass alle Fahrer im Mittel die Regel "Abstand gleich halber Tacho" berücksichtigen

- (a) im Stadtverkehr ($V_0 = 51$ km/h),
- (b) auf der Autobahn ($V_0 = 118$ km/h).

Die Geschwindigkeit von Störungen im gebundenen Verkehr sei in beiden Fällen $v_g = 17$ km/h.

9.4. Diffusion und die Burgers-Gleichung

Die Schockwellen sind nicht ganz realistisch und bereiten Probleme bei der numerischen Lösung - zumindest für andere Fundamentaldiagramme als dem dreieckigen. Zu ihrer Glättung wurde ein Diffusionsterm $D\partial^2\rho/\partial x^2$ mit $D > 0$ als Diffusionskonstante eingeführt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[V_e(\rho) + \rho \frac{dV_e}{d\rho} \right] \frac{\partial \rho}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad \text{LWR mit Diffusion.} \quad (9.19)$$

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

Diese nichtlineare partielle Differentialgleichung lässt sich i.A. nur numerisch lösen. Im Spezialfall einer linearen Geschwindigkeits-Dichte-Relationen (also einer Parabel als Fundamentaldiagramm) kann man die dann "Burgers-Gleichung" genannte Gleichung mittels der sogenannten "Cole-Hopf-Transformation" auf eine lineare Diffusionsgleichung abbilden und exakt lösen.

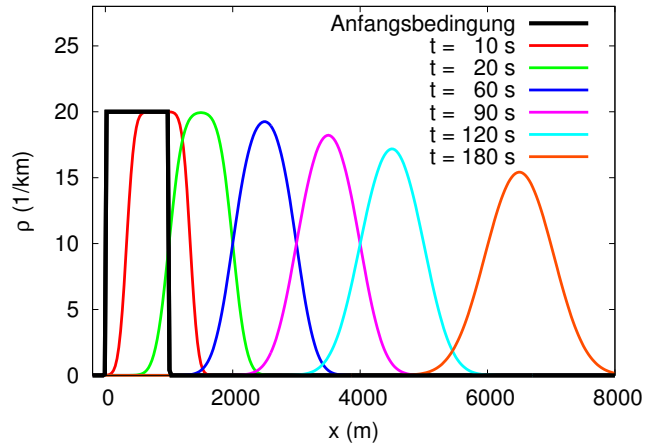


Figure 9.17.: Lösung der Diffusions-Transport-Gleichung (9.20) für die schwarz und dick gezeichnete Anfangsbedingung $\rho(x, 0)$.

Linearisiert man die Burgers-Gleichung für kleine Dichteschwankungen oder nimmt man lineare Fluss-Dichte-Relationen an (z.B. Gl. (9.6)) und befindet man sich überall oberhalb oder unterhalb der kritischen Dichte ρ_c des Übergangs freier-gebundener Verkehrs, so wird die Burgers-Gleichung (9.19) zur linearen **Diffusions-Transport-Gleichung**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (9.20)$$

mit $c = d(\rho V_e(\rho))/d\rho = V_e(\rho) + \rho dV_e/d\rho$. Abbildung 9.17 zeigt eine Lösung dieser Gleichung für freien Verkehr $c = V_e = V_0$ unter den Anfangsbedingungen einer endlichen Dichte in einem bestimmten Streckenabschnitt und einer leeren Fernstraße außerhalb.

9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

Aufgabe:

Zeigen Sie durch Einsetzen (d.h. Differenzieren), dass die normalverteilte Dichte

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(x - ct)^2}{4Dt}\right] \quad (9.21)$$

Gl. (9.20) für alle $t > 0$ löst. Wie verändert sich die "Breite" dieser Dichteverteilung, definiert als Standardabweichung, mit der Zeit? (*Hinweis:* Diese Lösung erfüllt nicht die Anfangsbedingung in Abbildung 9.17. Siehe dazu den separaten Aufgabenteil zu diesem Skript).

Verständnisfrage:

Warum ist D für "vernünftige" Verkehrsmodelle nie negativ? Diskutieren Sie dies anhand der Abb. 9.17 und der Lösung (9.21)

10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

Holzhacken ist deshalb so beliebt, weil man bei dieser Tätigkeit den Erfolg sofort sieht.

Albert Einstein

Die bisher betrachteten makroskopischen Verkehrsmodelle (LWR-Modelle) bestanden alle aus einer einzigen (partiellen) Differenzialgleichung für die Verkehrsdichte. Die Geschwindigkeit $V(x, t)$ dieser Gleichungen hatte keine eigene Dynamik, sondern ergab sich als statische Funktion direkt aus der Dichte. Dies entspricht einer instantanen Geschwindigkeitsanpassung an die bestehenden Verkehrsverhältnisse (Dichte und Dichtegradient), was wegen der endlichen Beschleunigungs- und Bremsfähigkeit realer Fahrzeuge eindeutig unrealistisch ist. Dies wird vor allem daran ersichtlich, dass mit den LWR-Modellen keine **Verkehrsinstabilitäten**, also wachsende **Stauwellen** simuliert werden können, die jedoch bei dichtem Verkehr in den Detektordaten fast immer beobachtet werden, wie z.B. in vielen Staus der Abb. 5.11.

Anhand Abbildung 10.1 kann man einige Eigenschaften der entstehenden Stauwellen sehen:

- **Martin: Einige Stylized Facts**

In realistischeren Modellen wird deshalb nicht die Geschwindigkeit, sondern die *Beschleunigung* als Funktion der Verkehrsverhältnisse (Dichte und Geschwindigkeit sowie deren Gradienten, d.h. räumlichen Ableitungen) angenommen.

Auf die *Kontinuitätsgleichung* hat dies keinen Einfluss, da sie ja direkt aus der Fahrzeughaltung folgt und damit für *alle* makroskopischen Verkehrsflussmodelle gilt. Je nachdem, wie kompliziert das Straßennetzwerk ist, kommt eine der Kontinuitätsgleichungen (8.8) bis (8.13) zum Einsatz.

Im Unterschied zu den Modellen des letzten Kapitels hingegen ist die Geschwindigkeit nicht mehr durch die Gleichgewichtsgeschwindigkeit $V = V_e(\rho)$ gegeben, sondern ist eine eigene dynamische Variable, welche durch eine **Beschleunigungsgleichung** der Form

$$\frac{dV(x, t)}{dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + V(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \right) V(x, t) = A(\rho(x, t), V(x, t)), \quad (10.1)$$

charakterisiert ist. Diese Gleichung besagt nichts anderes, als dass die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit $\frac{dV(x, t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x}$ vom *mitfahrenden Fahrzeug aus gesehen* (linke Seite, vgl. Abb. 10.2), gleich einer *Beschleunigungsfunktion* $A(x, t)$ ist (rechte Seite), welche das spezielle Verkehrsmodell charakterisiert. Die Ableitung $\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x}$ heißt auch **konvektive Ableitung** oder **Lagrange'sche Ableitung**.

10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

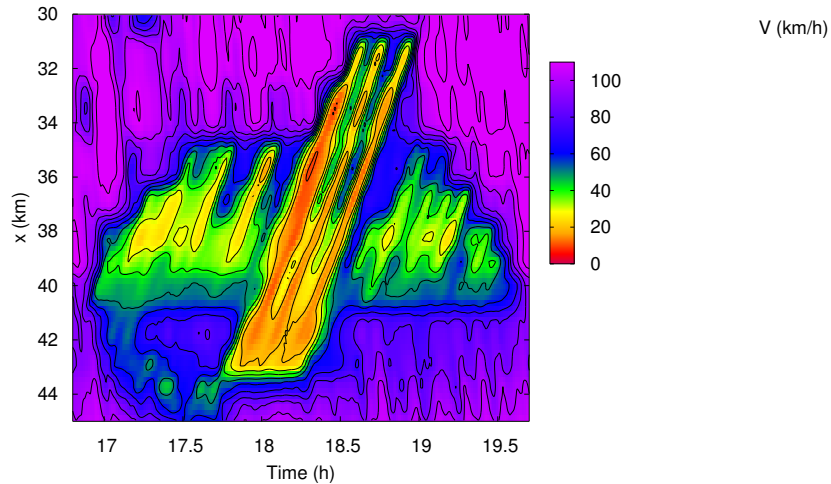


Figure 10.1.: Raumzeitliches Geschwindigkeitsprofil der A8-Ost in der Nähe des Irschenbergs, Die Steigung erstreckt sich von Streckenkilometer 38-41. Bei Kilometer 43.5 gab es zusätzlich eine temporäre unfallbedingte Engstelle. **Martin:** *x*-Achse umdrehen, mit Skizze

Die Beschleunigungsfunktion auf der rechten Seite hängt vom Verkehrszustand der Umgebung ab, insbesondere von der Verkehrsdichte $\rho(x, t)$ und der Geschwindigkeit $V(x, t)$ am betrachteten Ort, von den Gradienten $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ und $\frac{\partial V}{\partial x}$. Die Beschleunigungsfunktion kann auch **Nichtlokalitäten** enthalten, d.h. die Dichte oder die Geschwindigkeit wird nicht am Bezugsort x , sondern an einem Ort $x_a < x$ ausgewertet, der weiter vorne in Richtung des Verkehrsstroms liegt. Dadurch kann man berücksichtigen, dass Fahrer, im wahrsten Sinne des Wortes, *vorausschauend* fahren, vgl. den nächsten Abschnitt 10.1.

Da diese Modelle neben der Dichte $\rho(x, t)$ eine weitere dynamische Variable, die Geschwindigkeit $V(x, t)$ oder alternativ den Fluss $Q(x, t) = \rho(x, t)V(x, t)$ enthalten, werden sie im englischen Sprachgebrauch auch **second-order models** genannt, im Gegensatz zu den LWR-artigen **first-order models**.

10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

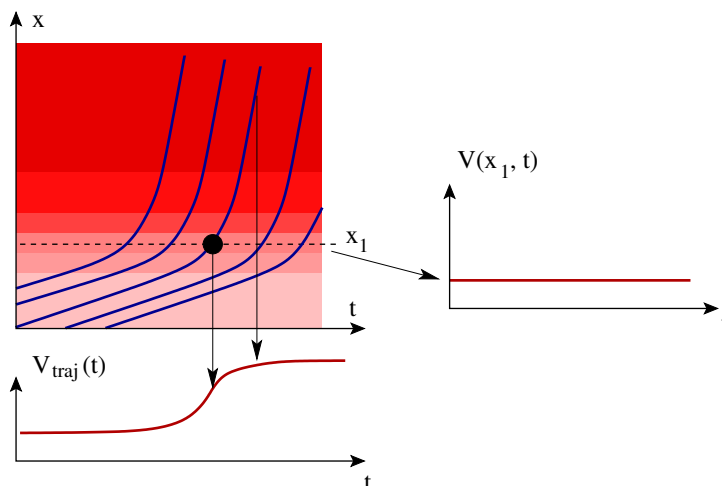


Figure 10.2.: Veranschaulichung der konvektiven Ableitung (Lagrange'sche Ableitung) entlang einer Fahrzeug-Trajektorie im Vergleich mit der partiellen Ableitung (Euler'sche Ableitung) im ortsfesten System. Entlang einer durch $x(t)$ gegebenen Trajektorie gilt $\frac{dV(x(t),t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} = V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t}$. Speziell gilt am Ort x_1 zur durch den schwarzen Punkt gekennzeichneten Zeit $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ (Geschwindigkeitsverlauf im rechten Bild ändert sich nicht), aber $\frac{dV}{dt} > 0$ (an dieser Stelle beschleunigen die Fahrzeuge, siehe den unten dargestellten Geschwindigkeitsverlauf)

10.1. Eigenschaften der Beschleunigungsfunktion

Zunächst beinhalten auch die meisten Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit einen stationär-homogenen Gleichgewichtszustand, also ebenso wie die LWR-Modelle ein "Fundamentaldiagramm" $Q_e(\rho)$ bzw. eine Gewichtsgeschwindigkeits - Dichte - Relation $V_e(\rho)$.¹ Da im stationär-homogenen Fall die linke Seite der Beschleunigungsgleichung (10.1) verschwindet, muss auch die rechte Seite verschwinden:

$$A(\rho, V_e(\rho)) = 0, \quad \text{falls} \quad \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (10.2)$$

Dies ist eine implizite Gleichung für die Funktion der Gleichgewichtsgeschwindigkeit $V_e(\rho)$ bzw. das Fundamentaldiagramm. Natürlich muss, wie bisher, auch gelten $\frac{dV_e}{d\rho} \leq 0$, $V_e(0) = V_0$ und $V_e(\rho_{\max}) = 0$ (vgl. Abb. 10.3).

Ferner repräsentiert die Beschleunigungsfunktion das Bestreben der Fahrer, eine (bei gegebener Dichte) zu hohe oder zu niedrige Geschwindigkeit durch Beschleunigung anzu-

¹Es gibt auch Modelle "ohne" Fundamentaldiagramm. Diese werden aber höchst kontrovers diskutiert und werden hier nicht betrachtet.

10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

passen (vgl. Abb. 10.4 weiter unten):

$$A(\rho, V) < 0, \quad \text{falls } V > V_e(\rho), \quad \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (10.3)$$

Analog gilt $A(\rho, V) > 0$ falls $V < V_e(\rho)$. Dies kann man zusammenfassen und auch auf den allgemeinen Fall mit Gradienten verallgemeinern durch die Bedingung

$$\frac{\partial A(\rho, V)}{\partial V} < 0. \quad (10.4)$$

Diese Gleichung sagt aus, dass bei Erhöhung der Geschwindigkeit die Beschleunigung abnimmt, zumindest falls alle anderen Umstände (Dichte, Dichtegradienten, Geschwindigkeitsgradienten) unverändert bleiben.² Wie später im Kapitel 10.6 gezeigt wird, reicht es jedoch nicht aus, dass ein Gleichgewicht vorhanden ist (Gl. (10.2)) und die Fahrer versuchen, dieses zu erreichen (Gl. (10.4)): Ohne zusätzliche Bedingungen wäre das Modell (10.1) immer instabil, es würden also immer Stop-and-Go-Wellen entstehen! Dies ist genauso unrealistisch wie das komplette Fehlen solcher Instabilitäten in den LWR-Modellen. In Wirklichkeit entstehen Instabilitäten nur in gewissen *Dichtebereichen*, welche hohem Fluss entsprechen. Genau dies wird durch Modellierung einer zusätzlichen **Antizipation** erreicht, bei der die Fahrer die zukünftigen Verkehrssituation vorwegnehmen bzw. die Situation weiter stromabwärts betrachten. Dies kann beispielsweise durch *Gradienten* realisiert werden:

$$\frac{\partial A(\rho, V)}{\partial \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)} \leq 0, \quad \frac{\partial A(\rho, V)}{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)} \geq 0, \quad (10.5)$$

wobei zumindest eine der beiden Bedingungen als strikte Ungleichung erfüllt sein muss. Ein möglicher Beitrag der Beschleunigungsfunktion ist gegeben durch

$$A_{\text{antic}}(x, t) = -C \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

mit einer positiven Konstante C , da dann gilt

$$\frac{\partial A_{\text{antic}}(\rho, V)}{\partial \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)} = -C < 0.$$

Offensichtlich bedeutet dieser Beitrag, dass man verstärkt bremst (bzw. weniger beschleunigt), wenn man in Bereiche höherer Verkehrsdichte (oder gar in einen Stau) hineinfährt.

Alternativ zur Bedingung (10.5) kann man eine *Nichtlokalität* einführen, indem man die Beschleunigungsfunktion nicht nur in Abhängigkeit der Größen $\rho = \rho(x, t)$ und $V = V(x, t)$ am aktuellen Ort definiert, sondern auch noch Abhängigkeiten von den

²Die Bedingung, dass alles andere gleich bleibt, wird häufig als *ceteris paribus* (lat. für "alles übrige bleibt gleich") bezeichnet.

10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

Verkehrsgrößen $\rho_a = \rho(x_a, t)$ und $V_a = V(x_a, t)$ an einer vorweggenommenen (zukünftigen) Position $x_a > x$ einführt. Dann muss gelten (vgl. auch Abb. 10.4 weiter unten)

$$\frac{\partial A(\rho, V, \rho_a, V_a)}{\partial \rho_a} \leq 0, \quad \frac{\partial A(\rho, V, \rho_a, V_a)}{\partial V_a} \geq 0. \quad (10.6)$$

Im Allgemeinen sind Modelle mit nichtlokalen Beschleunigungsfunktionen realistischer und gleichzeitig schneller zu simulieren als solche mit Gradienten in der Beschleunigungsfunktion, auch wenn sie zunächst komplizierter aussehen.

10.2. Ein Beispiel: Das Payne-Modell

Ein einfaches Beispiel eines makroskopischen Modells mit dynamischer Geschwindigkeitsgleichung ist das **Payne-Modell**. Die *Dichtegleichung* ist für alle makroskopischen Modelle dieselbe, also auch für das Payne-Modell durch eine der Gleichungen (8.8) - (8.13) gegeben. Die *Geschwindigkeitsgleichung* lautet

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_e(\rho) - V}{\tau} + \frac{V_e'(\rho)}{2\rho\tau} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad \text{Payne-Modell} \quad (10.7)$$

Im Anhang (A.1) wird dieses Modell aus einem einfachen mikroskopischen **Fahrzeugfolgemedell**, dem **Newell-Modell**, hergeleitet. In Fahrzeugfolgemedellen, die im Abschnitt 11 näher behandelt werden, wird die Geschwindigkeitsänderung eines jeden Fahrers (Bremsen oder Gasgeben) als Funktion des Verkehrsgeschehens betrachtet. Wie ein Makromodell mit dynamischer Geschwindigkeit hat also ein Fahrzeugfolgemedell eine Beschleunigungsfunktion. Ferner gibt es zu jedem Abstand eine Gleichgewichtsgeschwindigkeit, was makroskopisch einem Geschwindigkeits-Dichte-Diagramm entspricht, vgl. Abb. 10.3.

Die beschleunigungsfunktion der rechten Seite von (10.7) erfüllt die allgemeinen Anforderungen an eine Beschleunigungsfunktion:

- Es gibt gemäß (10.2) eine von der Dichte abhängige Gleichgewichtsgeschwindigkeit $V_e(\rho)$. Die Funktion $V_e(\rho)$ kann man im Rahmen der Bedingungen $\frac{dV_e}{d\rho} \leq 0$, $V_e(0) = V_0$ und $V_e(\rho_{\max}) = 0$ frei festlegen. Sie spezifiziert verschiedene Modellvarianten.
- Bei Erhöhung der Geschwindigkeit sinkt die Beschleunigungsfunktion gemäß (10.4): $\frac{\partial A(\rho, V)}{\partial V} = -\frac{1}{\tau} < 0$. Hierbei gibt der Modellparameter τ die Zeitskala an, in der sich eine Geschwindigkeit $V \neq V_e$ an die Gleichgewichtsgeschwindigkeit annähert.³
- Da nach Voraussetzung $V_e'(\rho) \leq 0$, gilt

$$\frac{\partial A(\rho, V)}{\partial \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)} = \frac{V_e'}{2\rho\tau} < 0,$$

³Immer vorausgesetzt, es gibt keine Instabilitäten. Diese werden später genauer besprochen

10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

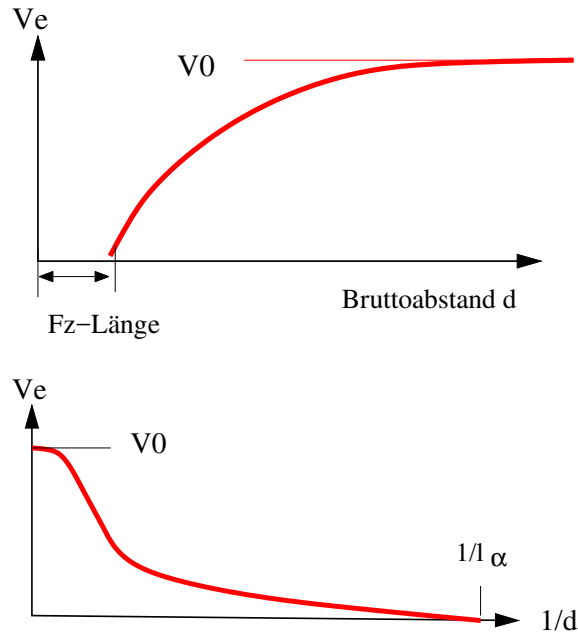


Figure 10.3.: Gleichgewichtsgeschwindigkeit als Funktion des Bruttoabstandes d und der Dichte $\rho = \frac{1}{d}$.

ein Dichteanstieg wie vor einem Stau führt also zu einer geringeren beschleunigung bzw. Bremsverzögerung, in Übereinstimmung mit bedingung (10.5). Dieser Term proportional zum Dichtegradienten $\partial\rho/\partial x$, auch als “Verkehrsdruck-Term” bezeichnet, wird in Abschnitt 10.3 in einen allgemeinen Zusammenhang gestellt.

Verständnisfrage:

Der Verkehrsdruckterm des Payne-Modells bewirkt beim Annähern an Verkehrsstaus eine zusätzliche Verzögerung und beim Herausfahren aus dem Stau eine Beschleunigung, d.h. er beschreibt eine **antizipative** (vorausschauende) Fahrweise. Wodurch kommt diese Antizipation zustande? Erläutern Sie seine Wirkung durch Überlegungen bezüglich des Vorzeichens dieses Terms!

Sonderfall verschwindender Anpassungszeit: Herleitung des LWR-Modells mit Diffusion

Ein *Sonderfall der Gleichung* liegt vor, wenn $\tau = 0$, d.h. wenn die Anpassungszeit unendlich klein und damit die Reaktionszeit unendlich klein sowie gleichzeitig die Beschleunigung unendlich groß ist. (Zu bemerken ist, dass diese Annahme zweifellos unrealistisch ist.) Nach Multiplikation der obigen Gleichung mit τ und anschließendem Nullsetzen von

10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

τ finden wir mit $\frac{dV_e(\rho)}{d\rho} = V_e'(\rho)$:

$$V_e(\rho) - V + \frac{1}{2\rho} V_e'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

In diesem Spezialfall hängt die Geschwindigkeit also statisch nur noch vom Ort x ab:

$$V = V_e(\rho) + \underbrace{\frac{V_e'(\rho)}{2\rho}}_{=-D(\rho)/\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = V_e(\rho) - \frac{D(\rho)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Im Gegensatz zum klassischen LWR-Modell ist sie aber nicht allein durch die Gleichgewichtsgeschwindigkeit gegeben, sondern enthält zusätzlich noch einen Anteil proportional dem Dichtegradienten: Steigt die Dichte beispielsweise an, gilt $V < V_e(\rho)$. Setzt man dies in die entsprechende Kontinuitätsgleichung ein (z.B. in die Gl. (8.8) im Falle homogener Streckenabschnitte), erhält man

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho V_e(\rho) - D(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0.$$

Dies ist die Lighthill-Whitham-Gleichung mit Diffusion, was man durch Umstellen der Gleichung noch besser erkennt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_e(\rho))}{\partial x} = + \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right), \quad (10.8)$$

wobei

$$D = D(\rho) = \frac{-V_e'(\rho)}{2}$$

hier eine variable Größe ist. Der Diffusionsterm wird oft verallgemeinernd mit anderer funktionaler Form, z.B. auch konstant, angenommen. In letzterem Fall reduziert sich (10.8) auf die Burgers-Gleichung (9.19).

10.3. Einheitliche Form der Makromodelle

Die verallgemeinerte Kontinuitätsgleichung (8.13) mit Diffusionsterm hat folgendes Aussehen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - \frac{\rho V}{I} \frac{\partial I}{\partial x} + \nu_{\text{rmp}}(x, t) \quad (10.9)$$

Der Term mit der Diffusionskonstanten D beschreibt eine "Diffusion" der Dichte, d.h. eine Aufweichung aller scharfer Übergänge und Schockfronten. Auf der Ebene der Fahrzeuge würde dies einem sog. **Random Walk** der einzelnen Fahrzeuge entsprechen,

10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

also einem erratischen und abrupten Ändern der Geschwindigkeit wie bei einem Betrunknen auf dem Nachhauseweg ("drunkard's walk"), wie schon Einstein 1905 erkannte.⁴ Der Diffusionsterm entspricht damit (hoffentlich) keiner realen Eigenschaft des Verkehrs. Er wird in einigen Modellen zur Verbesserung der numerischen Eigenschaften eingesetzt.

Die Rampen-Quellstärke (8.11),

$$\nu_{\text{rmp}}(x, t) = \begin{cases} \frac{Q_{\text{rmp}}(t)}{L_{\text{rmp}}} & \text{falls } x \text{ auf Höhe einer Rampe,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist nur parallel zu den Beschleunigungs- oder Verzögerungsfahrestreifen (Rampenlänge L_{rmp}) aktiv und beschreibt Flüsse von Zu- und Abfahrten. Der Term proportional $\frac{dI}{dx}$ gibt den verkehrlichen Effekt von Fahrestreifenzahländerungen an.

Die Geschwindigkeitsgleichung von Modellen mit dynamischer Geschwindigkeit weisen außerdem fast immer folgende Form auf:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_e - V}{\tau} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + A_{\text{rmp}}(x, t). \quad (10.10)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist der Advektionsterm, der schon von der Herleitung des Payne-Modell bekannt ist. Er beschreibt die Änderung des Geschwindigkeitsfeldes $V(x, t)$ aus der Sicht eines mit $V(x, t)$ sich bewegenden Beobachters, also die für ihn relevante Beschleunigung.

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält die einzelnen Beiträge zur makroskopischen Beschleunigungsfunktion $A(\rho, V)$:

- Der "Anpassungsterm" (Relaxationsterm) $(V_e - V)/\tau$ modelliert eine Anpassung der Geschwindigkeit V an die "optimale Geschwindigkeit" V_e innerhalb des Zeitrahmens τ . Die optimale Geschwindigkeit hängt meist von der Dichte ab. Man kann aber auch antizipierende (vorausschauende) Fahrweise mit dem Anpassungsterm beschreiben, indem man ihn als Funktion der Dichte $\rho(x_a, t)$ und der Geschwindigkeit $V(x_a, t)$ an einer Stelle $x_a > x$ formuliert, vgl. Abb. 10.4.
- Der "Druckterm" mit dem "Verkehrsdruck" P beschreibt eine Reaktion auf Dichte- und in manchen Modellen auch Geschwindigkeitsgradienten. Die entsprechende Beschleunigung wirkt i.A. der Verdichtung des Verkehrs ($\frac{\partial \rho}{\partial x} > 0$) entgegen. Der Druckterm kann verschiedene reale verkehrliche Effekte beschreiben. Ist ein Anteil z.B. durch

$$P_\theta = \rho \theta(\rho)$$

⁴In seiner Arbeit über den Random Walk erklärte Einstein 1905 die unter dem Mikroskop bereits seit langem beobachtete Zitterbewegung von kleinen Teilchen in Flüssigkeiten ("Brown'sche Bewegung") durch erratische Bewegung der Flüssigkeitsmoleküle und klärte damit gleichzeitig die Natur der Diffusion auf. Er wies damit erstmals nach, dass Materie aus Atomen und Molekülen besteht. Die anderen beiden wichtigen Arbeiten Einsteins in seinem *Annus Admirabilis* 1905 waren übrigens die (spezielle) Relativitätstheorie mit der berühmtesten Formel der Welt ($E = mc^2$) und eine Begründung der Quantentheorie. Den Nobelpreis bekam er später für letztere Arbeit.

10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

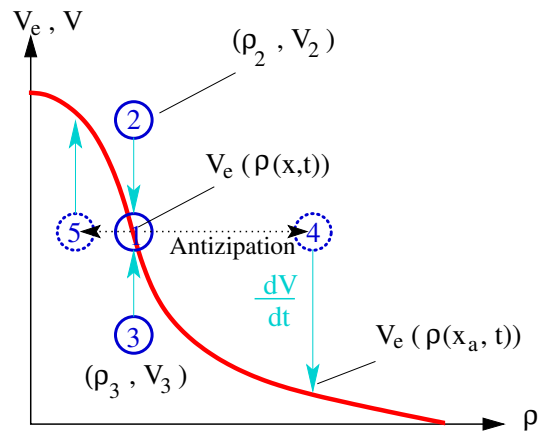


Figure 10.4.: Wirkung des Anpassungsterms $(V_e - V)/\tau$ in Gl. (10.10). Die Punkte ① - ③ charakterisieren drei angenommene Geschwindigkeiten $V(x, t)$ an einem bestimmten Ort x bei gegebener Dichte $\rho(x, t)$. Die hellblauen Pfeile geben die durch den Anpassungsterm bewirkten Geschwindigkeitsänderungen auf die Gleichgewichtsgeschwindigkeit (Punkt ①) an. Die virtuellen Punkte ④ und ⑤ veranschaulichen die Wirkung einer vorausschauenden Fahrweise: Man befindet sich nach wie vor am Ort x und außerdem wie bei ① im Gleichgewicht bezüglich der lokalen Dichte. Die Gleichgewichtsgeschwindigkeit wird aber für eine Dichte berechnet, wie sie am antizipierten Ort $x_a > x$ herrscht. Nähert man sich einem Stau (④, $\frac{\partial \rho}{\partial x} > 0$), dann bewirkt die Antizipation eine Verzögerung. Fährt man aus dem Stau heraus (⑤), ergibt sich eine positive Beschleunigung.

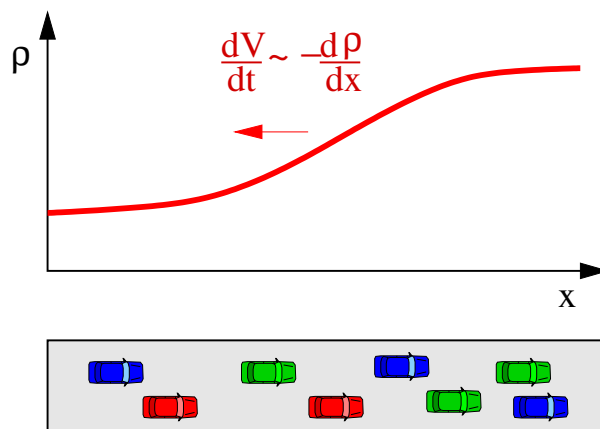


Figure 10.5.: Wirkung des Druckterms 1: Beschleunigung $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dV_e}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$ durch Dichtegradienten, hier Verzögerung bei Einfahrt in einen Stau.

10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

gegeben mit der Geschwindigkeitsvarianz $\theta = \langle (V - \langle V \rangle)^2 \rangle$, so beschreibt er die sonst in Makromodellen verlorengelassene *Heterogenität* des Verkehrs, d.h. die Tatsache, dass es bei gleicher Dichte schnellere und langsamere Fahrzeuge gibt, deren Geschwindigkeitsunterschiede durch θ beschrieben werden. Bei dieser Interpretation beschleunigt *keines* der beteiligten Fahrzeuge (vgl. Aufgabe "Kinematische Dispersion").

Ein weiterer Anteil, der z.B. die Form

$$P_a = \frac{V_0 - V_e(\rho)}{\tau} \quad (10.11)$$

bzw. $P_a = -V_e(\rho)/\tau$ annehmen kann,⁵ beschreibt alternativ zur Nichtlokalität im Anpassungsterm eine vorausschauende Fahrweise. Konkret beschreibt der Ausdruck (10.11) eine räumliche Antizipation um $\Delta x = 1/\rho$, also um den Abstand zum Vorderfahrzeug. Vergleicht man (10.11) mit dem Druckterm des aus einem Fahrzeugfolgemodell hergeleiteten Payne-Modell, fällt auf, dass beim Übergang von einem Fahrzeugfolgemodell zu einem Makromodell eine Antizipation um einen *halben* Fahrzeugabstand ins Spiel kommt (der Nenner des Drucks im Payne-Modell ist 2τ). Dies ist konsistent, da das entsprechende Fahrzeugfolgemodell nur auf den Abstand d empfindlich ist, welcher makroskopisch durch die Dichte bei $x + d/2 = x + 1/(2\rho)$ abgebildet wird: $1/d = \rho(x + d/2)$.

- Der "Diffusionsterm" mit der Diffusionskonstante ν führt, analog zur Diffusion in der Kontinuitätsgleichung, zur Aufweichung abrupter Geschwindigkeitsübergänge. Er beschreibt erratische Beschleunigungsänderungen (z.B. durch Unaufmerksamkeit oder Fehleinschätzungen der Fahrer) und wird für manche Modelle außerdem aus numerischen Gründen benötigt.⁶ Teilweise wird anstelle eines Diffusionsterms auch direkt ein stochastischer Term verwendet, was hier aber nicht weiter diskutiert werden soll.
- Der Rampenterm

$$A_{\text{rmp}}(x, t) = \frac{(V_{\text{rmp}} - V)}{\rho} \nu_{\text{rmp}}(x, t) \quad (10.12)$$

ist nur auf Höhe von Zu- oder Abfahrten ungleich Null und beschreibt die gegenüber dem Verkehr auf der Hauptfahrbahn verlangsamte Geschwindigkeit, mit der Fahrzeuge ein- bzw. ausfahren (vgl. Aufgabe "Rampenterm der Geschwindigkeitsgleichung").

⁵Da der Druck in (10.10) nur als Ableitung vorkommt, sind beide Ausdrücke äquivalent. Mit dem zusätzlichen Anteil V_0/τ verschwindet wegen $V_e(0) = V_0$ der Verkehrsdruck auf leerer Straße, was die Größe P anschaulicher macht.

⁶Für Hydrodynamiker: Hätte man keinen Autoverkehr, sondern eine reale Flüssigkeit oder ein reales Gas, so beschreibe ν die "Kompressionsviskosität".

10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

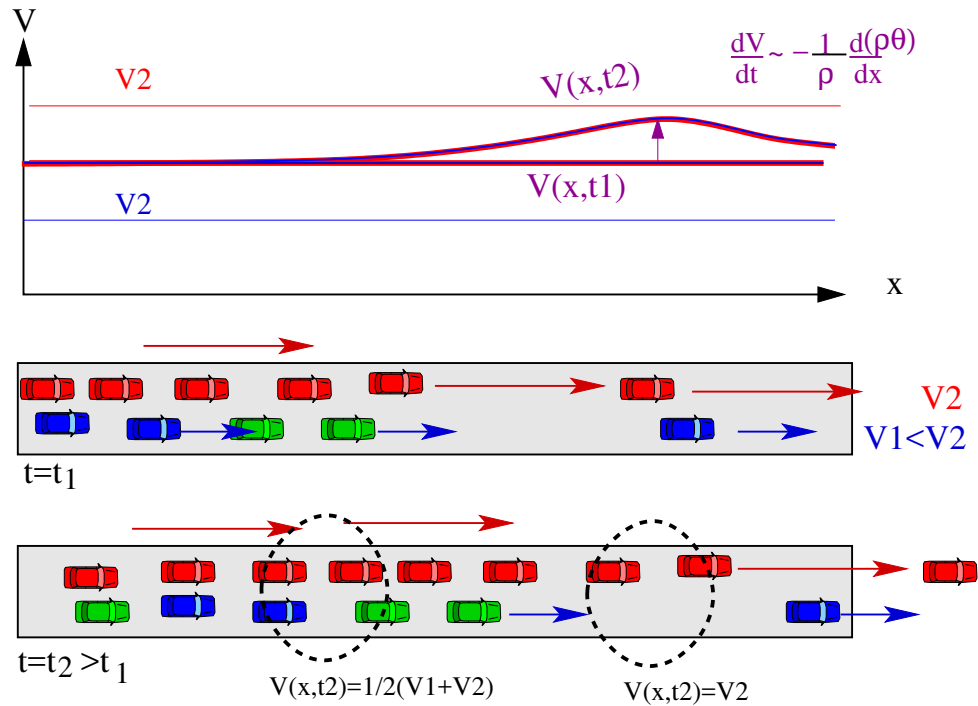


Figure 10.6.: Wirkung des Druckterms 2: Beschleunigung $\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho\theta)}{\partial x}$ durch Dichtegradienten in Kombination mit endlicher Geschwindigkeitsvarianz. Hier bewirkt ein Dichteabfall eine lokale Erhöhung der makroskopischen Geschwindigkeit, da die schnelleren Fahrzeuge eher in den Bereich geringerer Dichte hineinfahren als die langsameren, so dass der Anteil an schnellen Fahrzeugen erhöht wird. Zur Veranschaulichung fahren hier alle Fahrzeuge auf der linken Fahrstreifen mit konstanter Geschwindigkeit V_2 , die Fahrzeuge auf der rechten Fahrstreifen mit V_1 .

10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

Verständnisfrage:

Machen Sie sich den Effekt der kinematischen Dispersion anhand Abb. 10.6 klar, indem Sie als mikroskopische Situation zwei Fahrbahnen annehmen. Zur Zeit $t = 0$ herrscht auf beiden Fahrstreifen für $x < 0$ dieselbe konstante Dichte, während die Autobahn für $x > 0$ so wenig befahren ist, dass gerade noch eine positive Dichte definiert werden kann. Alle Fahrzeuge der rechten Fahrstreifen fahren konstant mit v_1 , die der linken mit $v_2 > v_1$. Wie kommt es, dass für $t > 0$ an bestimmten Stellen eine makroskopische Beschleunigung auftritt, *auch wenn kein einziges Fahrzeug beschleunigt?*

10.4. Übersicht über einige Makromodelle

Im Folgenden werden die bisher behandelten Modelle sowie einige weitere bekannte Makromodelle vorgestellt und in das allgemeine Schema eingeordnet.

- Lighthill-Whitham-Modell:

$$D = 0 \quad \text{und} \quad \tau \rightarrow 0, \quad \text{d.h.} \quad V = V_e(\rho)$$

- Burgers-Gleichung:

$$D = \text{const.} > 0 \quad \text{und} \quad \tau \rightarrow 0, \quad \text{d.h.} \quad V = V_e(\rho)$$

- Payne-Modell:

$$D = 0, \quad P(\rho) = \frac{V_0 - V_e(\rho)}{2\tau}, \quad \nu = 0.$$

Der Grenzfall $\tau \rightarrow 0$ liefert die Burgers-Gleichung mit variabler Diffusion,

$$D(\rho) = \frac{1}{2} \left| \frac{dV_e(\rho)}{d\rho} \right| \geq 0$$

- (Kühne-)Kerner-Konhäuser-Modell:

$$D = 0, \quad \tau = \text{const.} > 0, \quad P(\rho) = \rho\theta_0, \quad \nu = \text{const.} > 0.$$

- Gaskinetisches Modell (GKT-Modell):

$$D = 0, \quad \tau = \text{const.} > 0, \quad V_e = V_e(\rho, V, \rho_a, V_a) \quad \text{mit nichtlokalen Termen } \rho_a, V_a, \\ P(\rho, V) = \rho\theta(\rho, V), \quad \nu = 0$$

10.5. Entstehung von Stop-and-Go-Wellen

Stauwellen entstehen durch Vorhandensein von Reaktionszeiten der Fahrzeugführer sowie durch die endliche Beschleunigungs- und Bremsfähigkeit der Fahrzeuge. Beides führt zu einer verzögerten Anpassung der Geschwindigkeit an die Zielgeschwindigkeit (Anpassungszeit τ), die bei hinreichend großem Verkehrsaufkommen zu einem "Teufelskreis" führen kann (vgl. auch Abb. 11.6 auf S. 118):

- Wir nehmen an, dass das erste Fahrzeug 1 in einer Kolonne von mit der Geschwindigkeit v_K fahrenden Fahrzeugen aus irgendeinem Grunde leicht auf die Geschwindigkeit v_1 bremst.
- Damit ist auch für das nachfolgende Fahrzeug 2 die neue optimale Geschwindigkeit durch v_1 gegeben. Der Fahrer dieses Fahrzeugs kann aber seine Geschwindigkeit erst in endlicher Zeit von v_K auf v_1 anpassen.
- Ist der Verkehr dicht genug, verringert sich während dieser Zeit der Abstand stärker als es dem Gleichgewichtsabstand $d_e(v_1)$ bei der neuen Geschwindigkeit entspricht.
- Um wieder auf den Wunschabstand zu kommen, muss der Fahrer 2 seine Geschwindigkeit vorübergehend auf $v_2 < v_1$ absenken.
- Der nächste Fahrer 3 kann auf die Verzögerung des Fahrzeugs 2 von v_K auf v_2 ebenfalls nicht sofort reagieren und sein Abstand wird bei hinreichender Verkehrsdichte kleiner als der Wunschabstand $d_e(v_2)$. Er muss also auf $v_3 < v_2$ abbremsen, um den Abstand wieder zu erreichen. Der nächste Fahrer 4 ...

Diese "positive" Rückkopplung kann bis zum vorübergehenden Stillstand einzelner Fahrzeuge führen: eine **Stop-and-Go Welle** ist scheinbar "aus dem Nichts" entstanden!

Bei geringer Verkehrsdichte wird der Teufelskreis durchbrochen, denn dann nähert sich ein nachfolgendes Fahrzeug, z.B. Fahrzeug 3, erst dann dem Vorderfahrzeug (z.B. Fahrzeug 2) an, wenn dieses seinerseits bereits den Gleichgewichtsabstand wieder erreicht hat. Auch die Fahrzeuge 3,4 etc. müssen in diesem Fall ihre Geschwindigkeit nur auf die Geschwindigkeit v_1 des Störungs-Verursachers reduzieren, so dass der "Stop-and-Go-Mechanismus" nicht wirksam ist. Bei einer Anpassungszeit von 0, wie im LWR-Modell, ist dieser Mechanismus natürlich unabhängig von der Dichte nie wirksam. Konsequenterweise können bestehende Verkehrsstörungen im LWR-Modell oder verwandten Modellen nicht wachsen und damit kein Stop-and-Go-Verkehr aus kleinen Störungen entstehen. Lediglich vorhandene Dichteunterschiede können sich zu Schockwellen aufteilen, ohne dabei die Amplitude zu vergrößern.

Die Stabilitätsanalyse in folgendem Abschnitt 10.6 zeigt, dass sich die Neigung zu Verkehrsinstabilitäten in der Tat mit der Anpassungszeit, der Fahrzeugdichte und dem Gradient $|\frac{dV_e}{d\rho}|$ der optimalen Geschwindigkeit erhöht. Da bei sehr hoher Dichte $|\frac{dV_e}{d\rho}|$ klein ist, ergeben sich Verkehrsinstabilitäten vor allem im mittleren Dichtebereich $20 \text{ Fz/km/Spur} \leq \rho \leq 50 \text{ Fz/km/Spur}$, in Übereinstimmung mit den Beobachtungen.

10.6. Lineare Stabilitätsanalyse

Die makroskopischen Verkehrsgleichungen besitzen für jeden Wert der mittleren Verkehrsdichte ρ_e eine stationäre (zeitunabhängige) und homogene (raumunabhängige) Lösung

$$\rho(x, t) = \rho_e \quad \text{und} \quad V(x, t) = V_e(\rho_e) = V_e, \quad (10.13)$$

die einem gleichmäßigen Verkehrsfluss konstanter Dichte entsprechen.

Frage: Ist dieser gleichmäßige Verkehrsfluss stabil gegenüber kleinen Störungen oder schaukeln sich kleiner Störungen der Art

$$\begin{aligned} \rho_1(x, t) &= \rho(x, t) - \rho_e \ll \rho_e \\ V_1(x, t) &= V(x, t) - V_e \ll V_e \end{aligned}$$

zu Stop-and-Go-Wellen oder anderen Verkehrszusammenbrüchen auf?

Dazu setzen wir $\rho(x, t) = \rho_e + \rho_1(x, t)$ und $V(x, t) = V_e(\rho_e) + V_1(x, t)$ in die makroskopischen Verkehrsgleichungen ein und linearisieren diese, d.h. wir vernachlässigen alle quadratischen und Terme höherer Potenzen in den kleinen Dichte- und Geschwindigkeitsschwankungen wie $\rho_1^2(x, t)$, $\rho_1(x, t)V_1(x, t)$, etc., was einer Taylorapproximation 1.Ordnung entspricht.

Da die Lösung $\rho(x, t) = \rho_e$, $V(x, t) = V_e(\rho_e)$ ja nach Voraussetzung die Gleichungen erfüllen, fallen die "Terme nullter Ordnung" ohne $\rho_1(x, t)$ oder $V_1(x, t)$ ebenfalls weg und wir erhalten folgende linearisierten makroskopischen Gleichungen:⁷

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + V_e \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = -\rho_e \frac{\partial V_1}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2}$$

und

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + V_e \frac{\partial V_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_e} \frac{dP(\rho_e)}{d\rho} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau} \left[\frac{dV_e(\rho_e)}{d\rho} \rho_1 - V_1 \right].$$

Dieses lineare Gleichungssystem lässt sich analytisch lösen. Es zeigt sich, dass die Gleichgewichtslösungen $\rho(x, t) = \rho_e$ und $V(x, t) = V_e(\rho_e)$ linear instabil sind, d.h. instabil gegenüber kleinen Störungen $\rho_1(x, t)$ und $V_1(x, t)$, wenn

$$\rho_e \sqrt{\tau} \left| \frac{dV_e(\rho_e)}{d\rho} \right| > \left[\tau \frac{dP(\rho_e)}{d\rho} + D \right]^{\frac{1}{2}} \quad \begin{array}{l} \text{Instabilitäts-} \\ \text{bedingung für} \\ \text{Makromodelle.} \end{array} \quad (10.14)$$

Ohne einen Diffusionsterm in der Kontinuitätsgleichung ($D = 0$) vereinfacht sich dies zu

$$\left(\rho_e \frac{dV_e(\rho_e)}{d\rho} \right)^2 > \frac{dP(\rho_e)}{d\rho} \quad \begin{array}{l} \text{Instabilitäts-} \\ \text{bedingung für} \\ \text{Makromodelle } (D = 0). \end{array} \quad (10.15)$$

Für Interessierte ist die Herleitung dieser Gleichung im Dokument [mac_linStringStability.pdf](#) dargestellt.

Diskussion der Instabilitätsbedingung

⁷Wir nehmen hier an, dass V_e und P nur von $\rho(x, t)$ abhängen. Außerdem beschränken wir uns auf homogene Strecken.

10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

- Die *Instabilitätsschwelle* sinkt, d.h. die Tendenz zur Instabilität steigt mit wachsender Anpassungszeit τ und wachsendem Abfall $\left|\frac{dV_e}{d\rho}\right|$ der Gleichgewichtsgeschwindigkeit mit der Dichte. Dies ist anschaulich, da bei hohen Werten von τ die Fahrer lange beötigen, um sich auf eine neue Situation (z.B. steigende Dichte) einzustellen. Die Stärke der dann nötige Reaktion steigt wiederum mit dem Betrag $\left|\frac{dV_e}{d\rho}\right|$ der Änderung der Gleichgewichtsgeschwindigkeit mit der Dichte.
- Die Instabilitätsschwelle wächst, d.h. die Stabilität steigt mit wachsendem Anstieg $\frac{dP}{d\rho}$ des Verkehrsdruck P mit der Dichte. Dies ist plausibel, da man den Druckterm ja als Antizipation der Fahrer interpretieren kann.
- Schließlich wächst die Stabilität mit der Stärke D der Diffusion der Dichte. Dies ist anschaulich, da eine Diffusion lokalisierte Störungen "verschmiert". Da die Diffusion aber keinen realen Effekt beschreibt, sollte man auf sie möglichst verzichten. Bemerkenswerterweise hängt die lineare Stabilität *nicht* von der Geschwindigkeitsdiffusionskonstante ν ab. Sie stabilisiert aber größere Störungen, welche nicht in den Gültigkeitsbereich von (10.15) fallen und wird deshalb in einigen Modellen, z.B. den Kerner-Konhäuser-Modell, verwendet.

Für die Stabilitätsbereiche einzelner Modelle kann man folgende Aussagen treffen:

- Das Lighthill-Whitham-Modell ist marginal stabil: Wegen $D(\rho) = 0$ und $\tau(\rho) \rightarrow 0$ sind beide Seiten der Ungleichung identisch gleich Null, d.h. das Modell liegt im gesamten Dichtebereich an der Grenze zur Instabilität, was für die Entstehung der Schockwellen ohne Wachstum der Wellenamplitude verantwortlich ist.
- Die Burgers-Gleichung ist wegen $D > 0$ und $\tau \rightarrow 0$ nie linear instabil.
- Das Payne-Modell ist mit $D = 0$ und

$$\frac{dP(\rho)}{d\rho} = -\frac{1}{2\tau} \left| \frac{dV_e(\rho)}{d\rho} \right|$$

linear instabil unter der Bedingung

$$\tau\rho^2 \left| \frac{dV_e(\rho)}{d\rho} \right| > \frac{1}{2}.$$

- Das (Kühne-)Kerner-Konhäuser-Modell ist linear instabil für

$$\rho_e \left| \frac{dV_e(\rho)}{d\rho} \right| > \sqrt{\Theta_0}.$$

10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

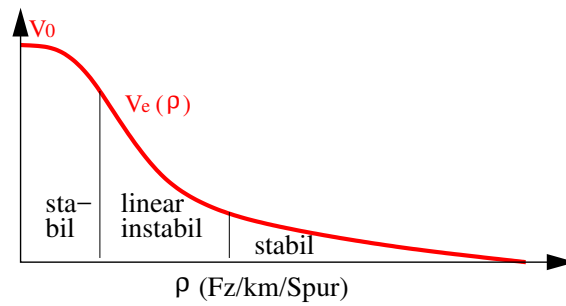


Figure 10.7.: Stabilitätsbereiche des Verkehrsflusses

11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

Nichts ist mächtiger als eine Idee zur richtigen Zeit.

Victor Hugo

In mikroskopischen Verkehrsmodellen wird das Verkehrsgeschehen aus der Perspektive einzelner **Fahrer-Fahrzeug-Einheiten** beschrieben. Gemäß den hauptsächlichen Aktionsmöglichkeiten des Fahrers unterscheidet man zwischen **Longitudinalmodellen**, die Beschleunigungen und Bremsmanöver modellieren, und **Spurwechselmodellen**.

In komplexen, möglichst realitätsnahen Modellen, die z.B. den Kern kommerzieller Simulationssoftware (vgl. Abschnitt 21) bilden, werden auch die teils subtilen Wechselwirkungen zwischen Beschleunigung und Fahrstreifenwechsel berücksichtigt und beide Komponenten zu einer Einheit verknüpft. Wechselwirkungen zwischen Beschleunigen/Bremsen und Fahrstreifenwechseln werden u.a. benötigt, um Rechtsüberholverbote oder beim antizipatorischen Beschleunigen als Vorbereitung für einen Fahrstreifenwechsel zu modellieren. Viele Fragestellungen wie Stabilität des Verkehrs, Bildung von Stop-and-Go-Verkehr und Simulation verschiedenster Verkehrsbeeinflussungsmaßnahmen lassen sich aber auch ohne Spurwechselmodell beschreiben, so dass wir solche Modelle nur relativ kurz beschreiben.

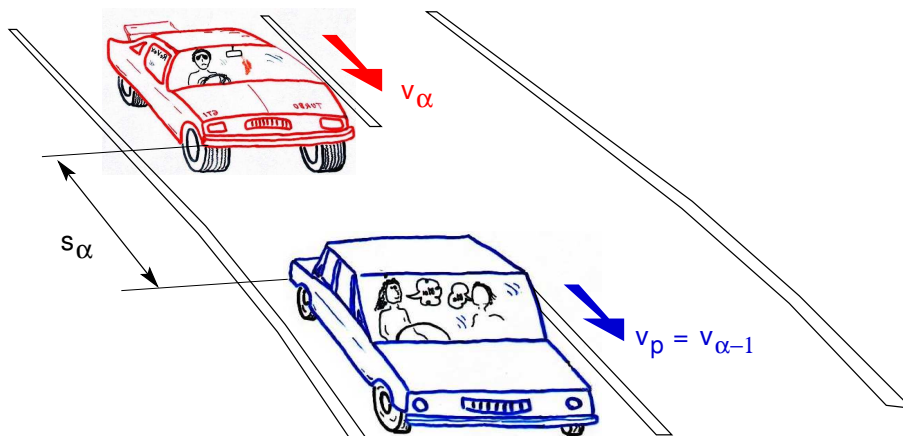


Figure 11.1.: Die wichtigsten Größen in Fahrzeugfolgmodellen

Die hier behandelten **Fahrzeugfolgemodelle** beschreiben Orte $x_\alpha(t)$, Geschwindigkeiten $v_\alpha(t)$ ¹ und Beschleunigungen $\dot{v}_\alpha(t)$ eines jeden einzelnen Fahrzeugs α als kontinuierliche

¹Zur Unterscheidung von der Geschwindigkeit von Makromodellen wird die Geschwindigkeit von Mikro-

11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

Funktion über die Zeit. Direkt aus der Definition der Geschwindigkeit folgt die für alle Fahrzeugfolgemodelle gültige Bewegungsgleichung

$$\dot{x}_\alpha(t) \equiv \frac{dx_\alpha}{dt} = v_\alpha(t). \quad (11.1)$$

Da für die zu modellierende Fahrer-Reaktion aber primär nicht die Orte der Fahrzeuge, sondern Nettoabstände $s_\alpha = x_{\alpha-1} - l_{\alpha-1} - x_\alpha = x_p - l_p - x_\alpha$ (vgl. Abb. 11.1), ist es sinnvoll, Gl. (11.1) für die Abstände zu formulieren:

$$\dot{s}_\alpha(t) = v_p - v_\alpha(t) := -\Delta v_\alpha. \quad (11.2)$$

Hier steht Δv_α für die *Annäherungsgeschwindigkeit* an das Vorderfahrzeug. Die verschiedenen Fahrzeugfolgemodelle unterscheiden sich allein in ihrem Ansatz für die Beschleunigung, welche das Fahrverhalten des Fahrers modelliert. Im einfachsten Fall hängt die Beschleunigung nur von der eigenen Geschwindigkeit sowie von Abstand, Geschwindigkeit (und evtl. Beschleunigung) des Vorderfahrzeugs ab:

$$\dot{v}_\alpha(t) = a_\alpha(v_\alpha, s_\alpha, v_p). \quad (11.3)$$

In manchen Mikromodellen wird die Beschleunigungsgleichung durch eine statische Geschwindigkeitsgleichung ersetzt, die allerdings erst eine endliche Zeitspanne später, nach der **Anpassungszeit** $\Delta t = \tau$ gilt:

$$v_\alpha(t + \Delta t) = v_{\text{opt}}(v_\alpha, s_\alpha, v_p). \quad (11.4)$$

Ein Beispiel für diese Formulierung ist das bereits bei der Herleitung des Payne-Modells vorgestellte Newell-Modell.

Zusammenfassend werden Fahrzeugfolgemodelle durch die Differenzialgleichungen (11.2) und (11.3) bzw. (11.4) beschrieben. Da auf den rechten Seiten dieser Gleichungen nicht nur das betrachtete Fahrzeug α , sondern auch das Vorderfahrzeug $\alpha - 1$ vorkommt, handelt es sich um **gekoppelte Differenzialgleichungen**. Auch die Differenzengleichung (11.4) kann man im Rahmen einer Taylorentwicklung als Beschleunigungsfunktion $a = (v_{\text{opt}} - v_\alpha)/\Delta t$ auffassen. Da Gleichung (11.2) – analog zu der Kontinuitätsgleichung der Makromodelle – für alle Fahrzeugfolgemodelle gilt, wird das konkrete Mikromodell allein durch die rechte Seite der Beschleunigungsgleichung (11.3) bzw. der Differenzengleichung (11.4) charakterisiert.

11.1. Ideale vs. reale Fahrer

Das Fahrzeugfolgmodell, das heißt die rechte Seite der Beschleunigungsgleichung, sollte menschliches (oder auch automatisches) Fahrverhalten möglichst realitätsgetreu beschreiben. Dazu ist es notwendig, sich die Unterschiede zwischen realen und idealen Fahrer bzw. zwischen "Mensch" und "Maschine" klarzumachen. Ein bezüglich des Fahrverhaltens "idealer Fahrer" hat insbesondere

modellen mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Im Allgemeinen gilt die Mikro-Makro-Beziehung $V = \langle v_\alpha \rangle$.

11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

- keinen Schätzfehler beim Bestimmen der Größen der Beschleunigungsfunktion, also der Abstände und Geschwindigkeiten,
- eine zu vernachlässigende Reaktionszeit,
- und eine durch nichts zu erschütternde Aufmerksamkeit.

Nur für diesen Fall gilt aber eine Beschleunigungsgleichung wie Gl.(11.3)! Ganz eindeutig sind diese Eigenschaften viel eher für sensorbasierte (adaptive) Temporegler, sog. **Adaptive Cruise Control (ACC)** Systeme), zutreffend als für reale Fahrer. Reale Fahrer kompensieren diese Mängel aber durch vorausschauendes Fahren über das Vorderfahrzeug hinweg, haben also eine ausgefeiltere Fahrstrategie als die vergleichsweise "kurzsichtigen", maximal das Vorderfahrzeug berücksichtigenden Fahrzeugfolgemodelle. Außerdem berücksichtigen menschliche Fahrer nicht nur Abstände und Geschwindigkeiten, sondern weitere Größen wie z.B. Bremslichter, Blinker oder die globale Verkehrssituation. All dies kann ebenfalls nicht durch eine Gleichung der einfachen Form (11.3) beschrieben werden.

Sensoren von ACC-Systemen können hingegen nur den Abstand zum Vorderfahrzeug sowie Geschwindigkeiten und deren Differenzen messen, so dass Fahrzeugfolgemodelle viel eher ACC-Systeme als menschliches Fahrverhalten modellieren! Es zeigt sich jedoch, dass die destabilisierenden Eigenschaften der menschlichen "Unvollkommenheiten" als Fahrzeuglenker zu einem großen Teil durch die stabilisierende Antizipationsfähigkeit kompensiert wird, was letztendlich die erfolgreiche Anwendbarkeit von auf Gl. (11.3) basierenden Fahrzeugfolgmodellen auf reale Verkehrssituationen begründet.

11.2. Modellierung von Beschleunigungs-, Folge- und Bremsstrategien

Die rechte Seite der Beschleunigungsgleichung (11.3) sollte mindestens folgende Aspekte modellieren:

1. Beschleunigung auf die **Wunschgeschwindigkeit** v_0 , falls die Strecke frei oder gar leer ist ²,
2. eine sichere Fahrzeugfolge- bzw. **Abstandsregelstrategie**, wenn die Verkehrsbedingungen keine Beschleunigung auf die Wunschgeschwindigkeit zulassen,
3. und eine **Bremsstrategie** beim Annähern von langsamen und stehenden Objekten, die Sicherheit unter allen Umständen und, wenn möglich, Komfort gewährleistet.

Bei der Modellierung von Beschleunigungen sind vor allem die Grenzen der Motorisierung wichtig sowie die Tatsache, dass diese im Normalfall nicht ausgenutzt werden.

²Zur Unterscheidung von der Wunschgeschwindigkeit von Makromodellen wird die Wunschgeschwindigkeit von Mikromodellen mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Bei unterschiedlichen Wunschgeschwindigkeiten (vgl. Abschnitt 13) gilt $V_0 = \langle v_{0\alpha} \rangle$, ansonsten $V_0 = v_0$.

11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

Bei der Modellierung von Abstandshalte- und Bremsstrategien stehen Sicherheit und Fahrkomfort unter Berücksichtigung einer Reaktionszeit T_r im Vordergrund. Im einfachsten Fall ist "Sicherheit" dann gegeben, wenn definierte Bremsmanöver eines einzelnen Vorderfahrzeugs unter Berücksichtigung einer Reaktionszeit T_r nicht zum Auffahrunfall führen. "Komfort" ist dann gegeben, wenn die maximale Bremsverzögerung eine gewisse "komfortable Verzögerung" b nicht überschreitet.

Wichtig: Bei einer Kolonne aus mehr als zwei Fahrzeugen sind diese Kriterien *nicht* hinreichend, da der auf S. 100 für Makromodelle beschriebene "Stop-and-Go-Mechanismus" natürlich auch für durch Mikromodelle beschriebene Fahrzeugkolonnen aus vielen Fahrzeugen relevant ist (vgl. Gl. (11.15) auf S. 115). Dies kann zu Unfällen führen, obwohl zwei Fahrzeuge unfallfrei fahren. Außerdem können im Vergleich zur Zweierkolonne die Bremsverzögerungen viel höher werden, vgl. Abb. 11.6.

11.2.1. Beispiel einer Fahrzeugfolgestrategie

Wir berechnen die bei isolierter Betrachtung einer Kolonne aus zwei Fahrzeugen maximale, sichere Geschwindigkeit v_{safe} des hinteren Fahrzeugs unter folgenden Vorgaben:

- (i) Wenn gebremst wird, dann mit einer konstanten Verzögerung b . Je nach Anwendung interpretiert man b als komfortable oder als maximale Verzögerung.
- (ii) Die Reaktionszeit ist gleich T_r .³ Erst danach kann der Fahrer des Folgefahrzeugs ggf. mit der Verzögerung b bremsen.
- (iii) Der aktuelle Abstand zum Vorderfahrzeug beträgt s , das Vorderfahrzeug fährt mit der Geschwindigkeit v_p und beginnt zum aktuellen Zeitpunkt mit der Verzögerung b bis zum Stillstand abzubremsen.

Martin: Bild aus handschr. VL-Folien: "Davor" und "Danach" Unfallfreiheit ist dann gegeben, wenn der anfängliche Abstand s größer ist als die Differenz der Bremswege, wobei für das Vorderfahrzeug der Bremsweg *ohne* Reaktionszeit, für das betrachtete *mit* Reaktionszeit zu berechnen ist:

$$s \geq vT_r + \frac{v^2}{2b} - \frac{v_p^2}{2b}.$$

Für die Grenzgeschwindigkeit $v = v_{\text{safe}}$ gilt das Gleichheitszeichen und man erhält nach Lösen der quadratischen Gleichung:

$$v_{\text{safe}} = -bT_r + \sqrt{b^2T_r^2 + v_p^2 + 2bs}. \quad (11.5)$$

Im Falle einer mit gleichmäßiger Geschwindigkeit ($v = v_p$) fahrenden Kolonne folgt aus der Ungleichung außerdem für den *zeitlichen* Mindestabstand $T = s/v$:

$$T \geq T_r \quad (11.6)$$

³Diese enthält die sensorische Erfassungszeit ("es geschieht etwas"), das Treffen einer Entscheidung (z.B. "ich muss bremsen") und deren Umsetzung (z.B. Fuß vom Gas auf die Bremse und diese durchdrücken)

11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

Bemerkenswerterweise können menschliche Fahrer i.A. noch unfallfrei fahren, wenn der zeitliche Abstand *kleiner* ist als die Gesamt-Reaktionszeit T_r .⁴ Und das überdies nicht nur bei Zweierkolonnen, sondern im Grenzfall von beliebig langen Kolonnen!

11.3. Beispiele von Fahrzeugfolgmodellen

In diesem Abschnitt wird der Übersichtlichkeit halber der Fahrzeugindex α weggelassen. Man sollte aber immer im Hinterkopf behalten, dass für Modellierung heterogenen Verkehrs (LKW, PKW, PKW mit ACC, vorsichtige und aggressive Fahrer, ...), wie im nächsten Abschnitt diskutiert, i.A. jedes Fahrzeug seine eigene Beschleunigungsgleichung haben kann.

11.3.1. Das Optimal Velocity Model

Im **Optimal Velocity Model** (OVM) ist die Beschleunigungsfunktion der allgemeinen Beschleunigungsgleichung (11.3) gegeben durch

$$\dot{v} = \frac{v_{\text{opt}}(s) - v}{\tau} \quad \text{Optimal-Velocity Modell} \quad (11.7)$$

Die *Beschleunigungsstrategie* wird durch Anpassen an die abstandsabhängige **optimale Geschwindigkeit** $v_{\text{opt}}(s)$ realisiert. Die *Abstandsstrategie* ist in der konkreten Form der optimalen Geschwindigkeitsfunktion enthalten, z.B. durch

$$v_{\text{opt}}(s) = \max \left(0, \min \left(v_0, \frac{s - s_0}{T} \right) \right) \quad (11.8)$$

mit der Wunschgeschwindigkeit v_0 , der Folgezeit T und dem Mindest-Nettoabstand s_0 . Das OVM berücksichtigt *nicht* die Geschwindigkeit des Vorderfahrzeuges. Es enthält auch keine sichere *Bremsstrategie*. Vielmehr sind Beschleunigungen und Bremsverzögerungen symmetrisch modelliert.

11.3.2. Das Newell Modell

Führt man für die Lösung der Beschleunigungsgleichung (11.7) eine Taylorentwicklung erster Ordnung bezüglich der Zeit durch, $v(t + \Delta t) = v(t) + \dot{v}_{\text{OVM}} \Delta t = v + (v_{\text{opt}} - v) \Delta t / \tau$, so erhält man für $\tau = \Delta t$ das **Newell Modell**

$$v(t + \Delta t) = v_{\text{opt}}(s(t)) \quad \text{Newell-Modell.} \quad (11.9)$$

Dies ist eine **Differenzgleichung** bzw. eine **iterierte Abbildung** (*iterated coupled map*), bei der der Update-Zeitschritt $\Delta t = 1$ s in den meisten Anwendungen gewählt

⁴Die Gesamt-Reaktionszeit beinhaltet neben der eigentlichen Reaktionszeit ("Bremslicht leuchtet auf") auch die mentale Umsetzung der Strategie ("ich muss auch bremsen"), die Bewegungszeit, um vom Gas- auf das Bremspedal zu steigen, die Zeit, um Pedaldruck aufzubauen und schließlich die Ansprechzeit der Bremsen selbst. Die Gesamtzeit ist i.A. länger als eine (!) Sekunde.

11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

wird. Manchmal wird die Update-Zeit auch als *Reaktionszeit* T_r bezeichnet, obwohl sie dynamisch wie eine Zeitspanne wirkt, in der der Verkehr nicht beachtet wird, um danach instantan auf die neue Situation zu reagieren, was “im Mittel” etwa einer halben Reaktionszeit entspricht. Dies wird in Abschnitt 11.6.1 diskutiert. Schließlich hat Δt außerdem noch eine dritte Rolle, die der *Geschwindigkeits-Anpassungszeit* τ , was ja direkt aus der Äquivalenz zum OVM folgt und was – da die tatsächliche Geschwindigkeitsanpassungszeit τ i.d.R. viel größer als Δt oder T_r ist – zu unrealistisch hohen Beschleunigungen und dennoch häufig zu Crashes führt.

Bis auf die Tatsache, dass hier die optimale Geschwindigkeit als Funktion des Nettoabstands s anstelle des Bruttoabstands d formuliert wurde (was durch geeignete Umdefinition der optimalen Geschwindigkeitsfunktion berücksichtigt werden kann), ist Gl. (11.9) identisch mit der bereits in Abschnitt A.1 formulierten Gl. (A.1).

11.3.3. Das Gipps Modell

Das **Gipps-Modell** ist ebenfalls als iterierte Abbildung (Differenzgleichung) formuliert:

$$v(t + \Delta t) = \min(v + a\Delta t, v_0, v_{\text{safe}}) \quad \text{Gipps-Modell,} \quad (11.10)$$

mit dem Update-Zeitschritt $\Delta t = 1$ s in den meisten Anwendungen. Die maximale sichere Geschwindigkeit v_{safe} wird gemäß Formel (11.5) berechnet. Die *Beschleunigungsstrategie* auf freier Strecke beinhaltet eine konstante Beschleunigung mit dem Wert a auf die Wunschgeschwindigkeit v_0 . Die Begrenzung der Geschwindigkeit auf v_{safe} beinhaltet im Gegensatz zum OVM eine sichere *Bremsstrategie*. Sie sorgt auch nach plötzlichen Änderungen der Verkehrssituation, z.B. plötzlichem Einscheren, ein häufig sehr realistisches Verhalten. Im stationären Kolonnenverkehr (das Vorderfahrzeug hat dieselbe Geschwindigkeit, $v_p = v$, und es gilt $v(t + \Delta t) = v(t) = v_{\text{safe}}$) bewirkt der Bremssterm eine *Folgezeit* $T = \Delta t$, welche identisch zum Update-Zeitschritt ist. Schließlich wird, wie im Newell Modell, Δt oft gleich der Reaktionszeit T_r gesetzt. (vgl. dazu die Diskussion nach Formel (11.5) auf S. 107 sowie Abschnitt 11.6.1).

Unrealistisch ist, dass es keinen Unterschied zwischen komfortabler und maximal möglicher Verzögerung gibt: Interpretiert man den Parameter b in Formel (11.5) für die sichere Geschwindigkeit als maximale Verzögerung, ist das Modell immer unfallfrei, aber man bremst auch immer maximal, d.h. *sehr* unkomfortabel. Interpretiert man b hingegen als komfortable Verzögerung und die (z.B. mit einem anderen Fahrzeugmodell simulierten) Vorderfahrzeuge bremsen stärker, kann das Modell doch wieder Unfälle produzieren. Ein weiterer Artefakt ergibt sich, wenn bei dieser Interpretation von b eine Fahrsituation eintritt, in der v_{safe} plötzlich wesentlich kleiner wird, z.B. wenn ein einscherendes Fahrzeug Bremsverzögerungen nötig macht, welche zwar noch beherrschbar sind aber oberhalb von b liegen.

Insgesamt ist das Gipps-Modell dennoch – gerade in Anbetracht seiner Einfachheit – eines der besten der als iterierte Abbildung formulierten Modelle.

11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

11.3.4. Das Velocity Difference Modell

Da das OVM wegen der fehlenden Sensitivität bezüglich Geschwindigkeitsdifferenzen zu Unfällen neigt, besteht eine Verbesserung darin, die Geschwindigkeitsdifferenz als linearen Stimulus mit zu berücksichtigen:

$$\dot{v} = \frac{v_{\text{opt}}(s) - v}{\tau} - \beta \Delta v \quad \text{Velocity Difference Modell} \quad (11.11)$$

Dieses, auch als **Velocity Difference Modell** (VDIFF) bezeichnete Modell ist bei geeigneten Werten des Sensitivitätsparameters β (realistische Werte liegen in der Größenordnung 0.1 s^{-1} bis 0.5 s^{-1}) auch bei Werten der Zeitkonstante τ von deutlich oberhalb von 1 s unfallfrei.

11.3.5. Das Intelligent Driver Modell

Ideen sind wie Kinder: Die eigenen liebt man am meisten.
Lothar Schmidt

Im **Intelligent Driver Model** (IDM) ist ein typischer Vertreter eines *First-Principles Modells*, welches durch die den Modellparametern entsprechenden Komponenten des Fahrverhaltens, der Forderung nach Unfallfreiheit sowie kontinuierlichen Übergängen spezifiziert ist. Die Beschleunigungsfunktion ist dabei durch den Vergleich der eigenen Geschwindigkeit v mit der Wunschgeschwindigkeit v_0 sowie Vergleich des tatsächlichen Abstandes s mit dem Wunschabstand s^* charakterisiert:

$$\dot{v} = a \left[1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^\delta - \left(\frac{s^*(v, \Delta v)}{s} \right)^2 \right] \quad \text{IDM} \quad (11.12)$$

Die *Beschleunigungsstrategie* auf freier Strecke entspricht einer Beschleunigung mit dem Maximalwert a , die nahe der Wunschgeschwindigkeit v_0 allmählich auf 0 abgesenkt wird. Je höher der Exponent δ (typische Werte liegen zwischen 2 und 4), desto abrupter wird das Gas erst kurz vor Erreichen der Wunschgeschwindigkeit weggenommen. Der dynamische Wunschabstand

$$s^*(v, \Delta v) = s_0 + \max \left(0, vT + \frac{v \Delta v}{2\sqrt{ab}} \right) \quad (11.13)$$

beinhaltet einen Gleichgewichtsanteil $s_0 + vT$ (Mindestabstand s_0 , Folgezeit T), der die *Abstandsstrategie* beim Kolonnenfahren realisiert, sowie einen von der Annäherungsgeschwindigkeit $\Delta v = v - v_p$ an das Vorderfahrzeug abhängigen, dynamischen Anteil. Dieser Term implementiert die folgende *intelligente Bremsstrategie* bei Annäherung an ein langsames oder stehendes Fahrzeug bzw. an eine rote Ampel:

- Ist die Situation unter Kontrolle, wird "weich" gebremst, wobei die komfortable Verzögerung b erst allmählich erreicht und kurz vor dem Stillstand wieder abgebaut wird.

11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

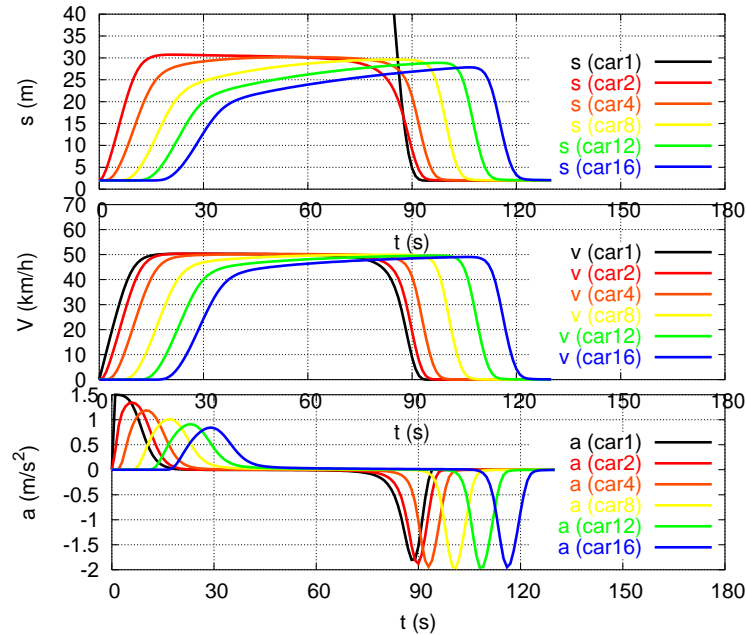


Figure 11.2.: Eine Kolonne von 16 IDM-Fahrzeugen ($a = 1.5m/s^2, b = 2m/s^2$) im Stadtverkehr von Ampel zu Ampel.

- Ist die Situation kritisch, wird stärker als die komfortable Verzögerung gebremst und so die Situation wieder unter Kontrolle gebracht.

Die verschiedenen Fahrbereiche "Beschleunigen", "Folgen" und "Bremsen" gehen kontinuierlich ineinander über. Je nach Parameter und Verkehrsdichte ist das IDM kolonnenstabil oder nicht, abgesehen von extremen Parameterwerten aber immer unfallfrei.

11.4. Fundamentaldiagramme von Mikromodellen

Bei Mikromodellen ist eine notwendige Bedingung für ein eindeutiges Fundamentaldiagramm $Q_e(\rho)$ oder Geschwindigkeits-Dichte-Diagramm $V_e(\rho)$ die Annahme, dass alle Fahrer-Fahrzeug-Einheiten identisch sind.⁵

Verständnisfrage:

Was bedeutet dies für die Simulation?

Das Fundamentaldiagramm beschreibt dann

- **homogenen Verkehr** (alle Fahrzeuge fahren gleich schnell und mit demselben Abstand voneinander) sowie

⁵Es sind Modelle vorstellbar, die auch dann keine eindeutige Gleichgewichtsrelation haben, was verschiedentlich gefordert wird, aber umstritten ist.

11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

- **stationären Verkehr** (alle Beschleunigungen sind =0) in Abhängigkeit von der Verkehrsdichte.

Üblicherweise wird das Fundamentaldiagramm auch für Mikromodelle makroskopisch formuliert, d.h. man muss die mikroskopischen Abstände s_α und Geschwindigkeiten v_α als Funktion der makroskopischen Größen Fluss Q , lokal gemittelte Geschwindigkeit V und Dichte ρ ausdrücken. Für homogenen und stationären Verkehr aus identischen Fahrzeugen sind die entsprechenden **Aggregierungsformeln**⁶ gegeben durch

$$s_\alpha = s = \frac{1}{\rho} - l, \quad v_\alpha = V = \frac{Q}{\rho}. \quad (11.14)$$

Wir berechnen nun die Fundamentaldiagramme für die besprochenen Modelle, wobei wir im OVM, dem Geschwindigkeitsdifferenz-Modell und dem Newell-Modell die optimale Geschwindigkeitsfunktion

$$v_{\text{opt}}(s) = \max(0, \min(v_0, \frac{s - s_0}{T}))$$

annehmen.

Die Modelle lauten (bei Unterdrückung des Fahrzeugindex α):

$$\begin{aligned} v(t + \Delta t) &= v_{\text{opt}}(s) && \text{Newell-Modell,} \\ \dot{v} &= \frac{v_{\text{opt}}(s) - v}{\tau} && \text{OVM,} \\ \dot{v} &= \frac{v_{\text{opt}}(s) - v}{\tau} - \beta \Delta v && \text{VDIFF,} \\ v(t + \Delta t) &= \min(v + a\Delta t, v_0, v_{\text{safe}}), && \\ v_{\text{safe}} &= -bT_r + \sqrt{b^2 T_r^2 + v_p^2 + 2bs} && \text{Gipps-Modell,} \\ \dot{v} &= a \left[1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^\delta - \left(\frac{s^*(v, \Delta v)}{s} \right)^2 \right], && \\ s^*(v, \Delta v) &= s_0 + vT + \frac{v\Delta v}{2\sqrt{ab}} && \text{IDM} \end{aligned}$$

Die Stationaritätsbedingung wird im OVM, VDIFF und IDM zu

$$\frac{dv}{dt} = 0,$$

während sie beim Newell- und Gipps-Modell die Bedingung

$$v(t + \Delta t) = v(t)$$

ergibt. Die Homogenität ist nur für das Gipps-Modell, das VDIFF und das IDM relevant, da die anderen beiden Modelle nicht auf die Geschwindigkeit des Vorderfahrzeugs reagieren. Sie ergibt

$$\Delta v = 0$$

⁶Im Folgenden werden wir Geschwindigkeiten von Einzelfahrzeugen mit "klein v " und die aggregierten makroskopischen Geschwindigkeiten mit "groß V " bezeichnen.

11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

im IDM und VDIFF, und

$$v_p = v$$

im Gipps-Modell.

OVM und VDIFF-Modell: Es gilt die Gleichgewichtsgeschwindigkeit

$$v_e(s) = v_{\text{opt}}(s)$$

bzw. mit $s = \frac{1}{\rho} - l$ und $Q = \rho V$ das Fundamentaldiagramm

$$Q_e(\rho) = \rho v_{\text{opt}}\left(\frac{1}{\rho} - l\right)$$

Setzt man die optimale Geschwindigkeit $v_{\text{opt}}(s) = \max(0, \min(v_0, \frac{s-s_0}{T}))$ ein, erhält man

$$Q_e(\rho) = \begin{cases} \rho V_0 & \rho \leq \rho_c = 1/(s_0 + l + v_0 T) \\ \frac{1}{T}[1 - \rho(s_0 + l)] & \rho_c < \rho \leq \frac{1}{s_0 + l} \\ 0 & \rho > \frac{1}{s_0 + l} \end{cases}$$

Gipps-Modell: Wegen $v(t + \Delta t) = v$ fällt die Beschleunigungsbedingung $v + a\Delta t$ auf der rechten Seite weg und es gilt mit $v = v_p = v_e(s)$

$$v = v_e(s) = \min(v_0, v_{\text{safe}}) = \min(v_0, \frac{s}{T_r})$$

bzw.

$$Q_e(\rho) = \begin{cases} v_0 \rho & \rho \leq \rho_c = 1/(l + v_0 T), \\ \frac{1}{T}(1 - \rho l) & \rho > \rho_c. \end{cases}$$

Das Gipps-Fundamentaldiagramm entspricht also dem des OVM und des Newell-Modells für die spezielle optimale Geschwindigkeitsfunktion $v_{\text{opt}} = \max(0, \min(v_0, \frac{s-s_0}{T}))$, wobei zusätzlich $s_0 = 0$ ist.

IDM: mit $\dot{v} = 0$ und $\Delta v = 0$ erhält man

$$1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^\delta - \left(\frac{s_0 + v_0 T}{s}\right)^2 = 0$$

Dies kann man in einfacher Weise nur nach s auflösen und erhält statt $v_e(s)$ die Umkehrfunktion $s_e(v)$:

$$s_e(v) = \frac{s_0 + vT}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^\delta}}$$

Mit $s_e = \frac{1}{\rho} - l$ bekommt man dann das Fundamentaldiagramm in der Form $\rho_e(v)$, vgl. folgende Plots.

11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

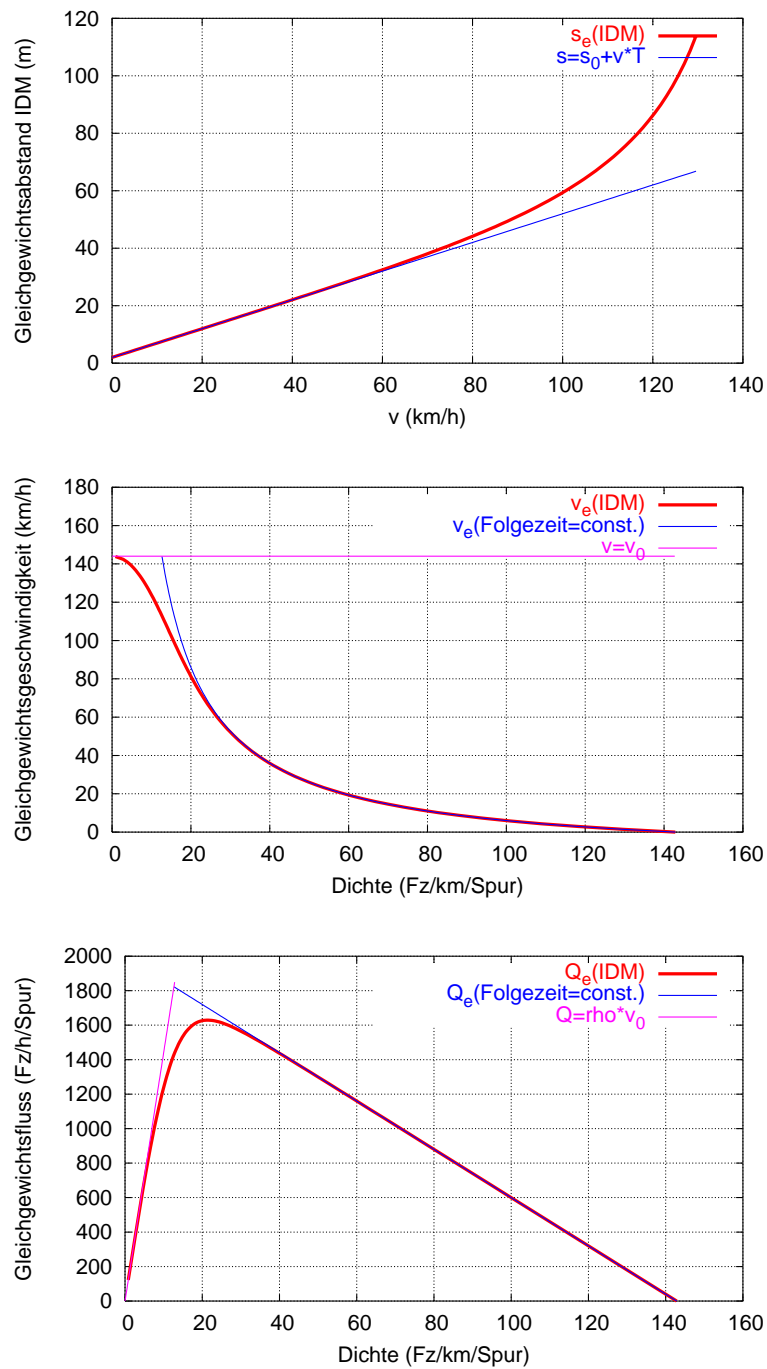


Figure 11.3.: (a) Mikroskopisches Abstands-Geschwindigkeits-Gleichgewichts und (b),(c) daraus abgeleitete makroskopische Geschwindigkeits-Dichte- und Fluss-Dichte-Relationen für das IDM.

11.5. Stabilität und Hysterese von Mikromodellen

Analog zu den Makromodellen wird im OVM der Stop-and-Go-Mechanismus durch Gradienten der optimalen Geschwindigkeitsfunktion getrieben. Er wird verstärkt, wenn sehr kurzfristig erst im letzten Augenblick gebremst wird. Nur schnelles "Herausfahren" aus einer Stop-and-Go-Welle (und natürlich ein geringes Verkehrsaufkommen) kann den "Teufelskreis" des Stop-and-Go-Mechanismus unterbrechen. Daraus folgt:

- Die Instabilität wächst mit dem Gradienten $\frac{dv_{\text{opt}}}{ds}$ der optimalen Geschwindigkeitsfunktion.
- Hohe Werte der komfortablen Verzögerung b stellen eine kurzsichtige Fahrweise dar und tragen ebenfalls zur Instabilität bei.
- Höhere Beschleunigungswerte a bzw. v_0/τ (d.h. "stärkere" Autos) stabilisieren den Verkehr.

Martin: "Teufelskreis"-Bild aus Vortrag Für das OVM und das Newell Modell erhält man für hinreichend lange Kolonnen das einfache Stabilitätskriterium (Herleitung im Buch "Verkehrsdynamik:)

$$\tau \left| \frac{dv_{\text{opt}}}{ds} \right| \leq \frac{1}{2}. \quad (11.15)$$

Für das Gipps-Modell und das IDM sind die Kriterien komplizierter, vgl. Abb. 11.4 für das Gipps-Modell.

Folgendes ist zur Interpretation der Stabilitätsformel (11.15) (bzw. der Stabilitätsbereiche in Abb. 11.4) wichtig:

- Die Formel gilt für hinreichend lange Kolonnen im Gleichgewicht. Kürzere Kolonnen, insbesondere Zweierkolonnen, sind wesentlich stabiler, vgl. Abb. 11.6.
- Instabilität bedeutet Neigung zu Stop-and-Go Verkehr, aber *nicht* notwendigerweise Unfälle. Diese finden erst dann statt, wenn die Instabilitätsgrenze weit überschritten ist.

Eine *hysteretische* Verkehrsdynamik liegt vor, wenn der Ausfluss aus dem Stau geringer als der maximal erreichbare Fluss ist. Dies ist vor allem bei geringen Beschleunigungen a bzw. v_0/τ der Fall (Abb. 11.4), da dann am Stauende die Vorderfahrzeuge "davonfahren" und die resultierenden größeren Abstände zu entsprechend geringeren Flüssen führen.

11.6. Modellierung menschlichen Fahrverhaltens

Bis auf das Newell- und das Gipps-Modell haben die Beschleunigungsgleichungen der bisher vorgestellten Fahrzeugfolgemodelle alle die allgemeine Form

$$\dot{v}_\alpha(t) = a_\alpha(v_\alpha, s_\alpha, v_p). \quad (11.16)$$

11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

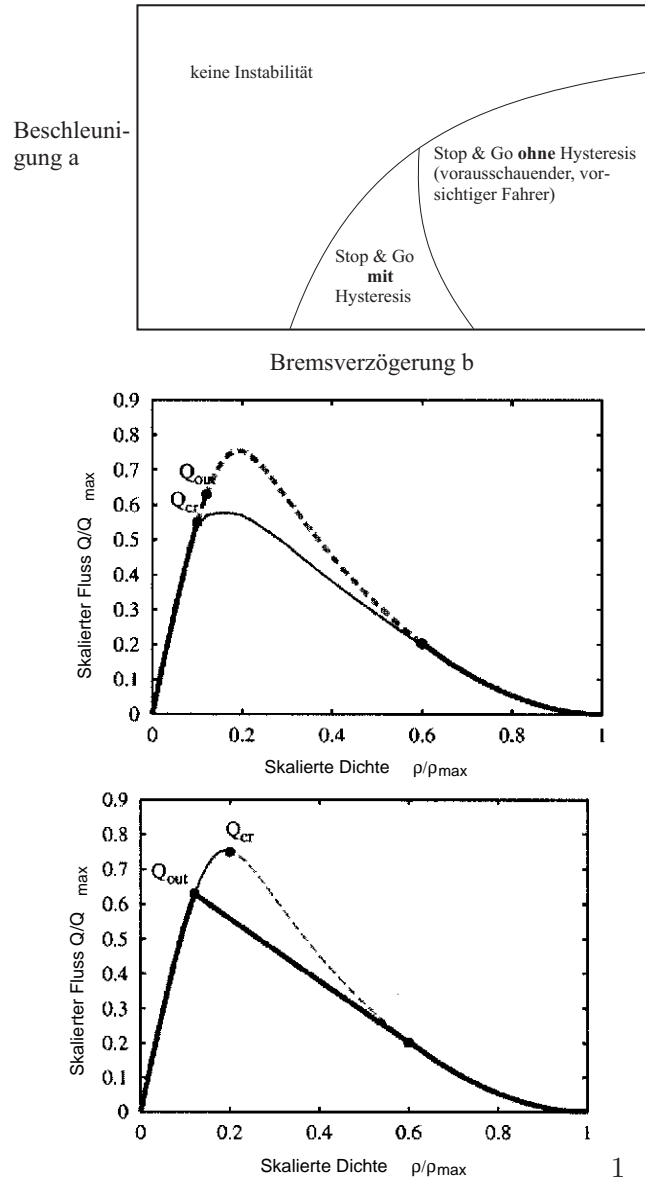


Figure 11.4.: Oben: Phasendiagramm des Gipps Modells: Auswirkung des Beschleunigungsparameters a und des Bremsverzögerungsparameters b auf die Stabilität des Verkehrsflusses. Gezeigt sind jeweils die Verhältnisse bei *kritischer Verkehrsnachfrage* und für *gestauten* Verkehr, bei denen es in den untenstehenden Bildern zwei Flusskurven gibt. Unten links: Fluss-Dichte-Diagramme für Modelle ohne Instabilität (Fundamentaldiagramm, gestrichelt) und mit Instabilität, aber ohne Hysterese (dünn, durchgezogen). Unten rechts: Fluss-Dichte-Diagramm für Modelle mit Instabilitäten und Hysterese. Bei Stop-and-Go-Wellen werden die gestrichelten und durchgezogenen Kurven im Uhrzeigersinn durchlaufen. Im Bereich der gestrichelten Kurve ist der Verkehr instabil und bricht zusammen. *Bemerkung:* In den meisten Modellen ist die Verkehrsdynamik entweder immer stabil oder zeigt Instabilität und Hysterese.

11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

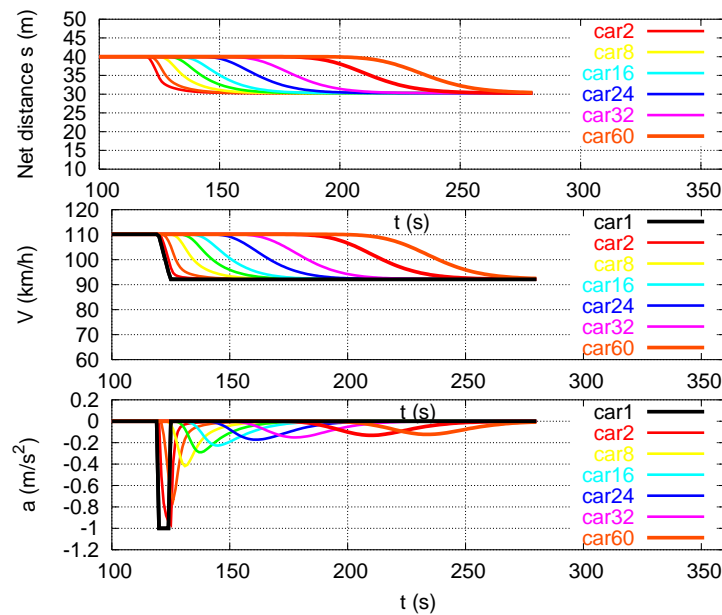


Figure 11.5.: Reaktion einer Kolonne von gleichartigen IDM-Fahrzeugen (Wunschgeschwindigkeit der folgenden Fahrzeuge: 144 km/h) auf ein Bremsmanöver des ersten Fahrzeugs (IDM-Parameter $a = b = 2 \text{ m/s}^2$).

Wie bereits in Abschnitt 11.1 erläutert, bedeutet dies, dass die Fahrer ohne Reaktionszeit und Schätzfehler reagieren, aber nur das unmittelbare Vorderfahrzeug berücksichtigt wird. Interessanterweise entspricht dies im Wesentlichen den Eigenschaften automatischer Beschleunigungs- und Bremsregler, welche in Abschnitt 19.3 näher besprochen werden.

Im Gegensatz dazu haben menschliche Fahrer insbesondere folgende, bisher nicht berücksichtigte Eigenschaften:

- Eine endliche Reaktionszeit, die etwa 1 s beträgt und bei mangelnder Aufmerksamkeit auch bedeutend größer sein kann,
- Endliche Schätzfehler beim Bestimmen von Geschwindigkeiten, Abständen und Beschleunigungen (letztere können i.A. nur durch Bremslichter grob in die Kategorien “bremst” und “bremst nicht” eingeteilt werden).
- Dafür berücksichtigt der Fahrer i.A. nicht nur das Vorderfahrzeug, sondern weitere Fahrzeuge davor, sowie Fahrzeuge auf den Nachbarfahrstreifen und das Fahrzeug dahinter. Teilweise kooperiert der Fahrer auch mit diesen Fahrzeugen, z.B. indem er eine Lücke zum Fahrstreifenwechseln lässt.
- Außerdem werden Verkehrssituationen zeitlich vorweggenommen (antizipiert), wobei gewisse Heuristiken angenommen werden, z.B. die, dass sich die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Nachbarfahrzeuge nicht ändern.

11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

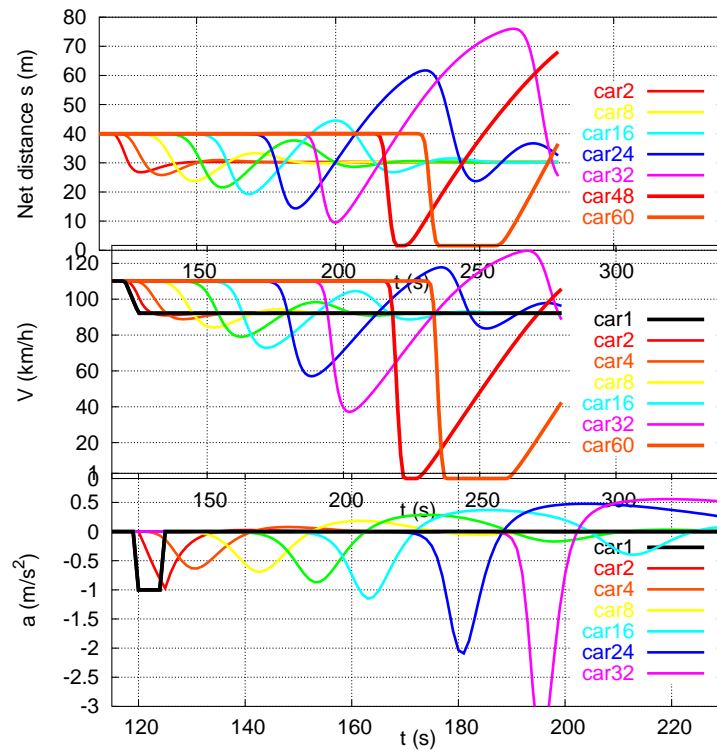


Figure 11.6.: Situation von Abb. 11.5 bei Kolonneninstabilität (IDM-Parameter $a = 0.7m/s^2$, $b = 7m/s^2$).

11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

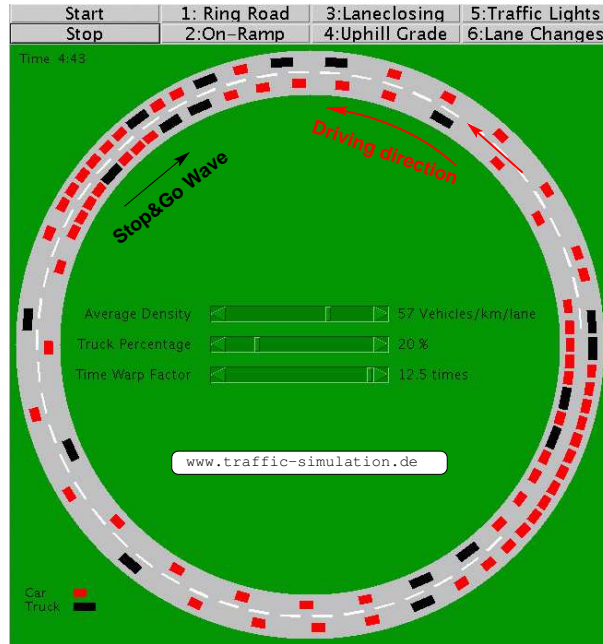


Figure 11.7.: Simulation von Stop-and-Go-Wellen mit dem IDM (Online-Simulationen unter www.traffic-simulation.de)

Durch diese letzten beiden Punkte kann z.B. ein Stau frühzeitig erkannt werden oder man sieht eine sich in wenigen Sekunden eröffnende Möglichkeit zum Fahrstreifenwechsel, so dass man bereits auf der alten Fahrstreifen beschleunigen oder bremsen kann, um die Geschwindigkeit der der neuen Sour anzupassen.

11.6.1. Modellierung der Reaktionszeit

Die Modellierung ist einfach, wenn man eine konstante Reaktionszeit T_r annimmt und berücksichtigt, dass eine Reaktionszeit dadurch definiert ist, dass die Reaktion, also der Beschleunigungswunsch, gegenüber den Eingangsstimuli (Geschwindigkeit, Abstand, Geschwindigkeitsdifferenz um T_r verzögert ist. Wenn das Modell ohne Reaktionszeit durch $a_\alpha(v_\alpha(t), s_\alpha(t), v_p(t))$ gegeben ist, erhält man folgende Modellgleichung:

$$\dot{v}_\alpha(t) = a_\alpha(v_\alpha(t - T_r), s_\alpha(t - T_r), v_p(t - T_r)). \quad (11.17)$$

Dies ist eine **Delay-Differenzialgleichung**, welche numerisch aber problemlos lösbar ist. Wie allgemein in der Regelungstechnik machen steigende Reaktionszeiten, welche ja nichts anderes als Totzeiten darstellen, das Modell instabiler.

Einen Sonderfall stellen die als Differenzengleichungen formulierten Modelle wie die von Newell, Gl. (A.1) und Gipps, Gl. (11.10) dar. Man kann sie auf zweierlei Weise interpretieren:

11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

- Als Modell *mit* Reaktionszeit $T_r = \Delta t$, welches direkt die Geschwindigkeit angibt, also *unendliche Beschleunigungsfähigkeiten* voraussetzt,
- Als Modell *ohne* Reaktionszeit, wenn man den Parameter Δt als Anpassungszeit an die neue Geschwindigkeit interpretiert. In diesem Fall ist z.B. das Newell-Modell als eine diskretisierte Version des OVM aufzufassen.

Man kann auch den Parameter Δt dieser Modelle als Summe aus Reaktions- und Anpassungszeit interpretieren, doch sind die verwendeten Werte von meist $\Delta t = 1$ s i.A. viel zu klein für diese Interpretation.

11.6.2. Modellierung von Schätzfehlern und unvollkommener Fahrweise

Schätzfehler, Fahrfehler, Störungen aller Art, ganz allgemein zufällige Abweichungen von der in den vorgestellten Mikromodellen modellierten "deterministischen" Fahrweise können pauschal durch Hinzufügen eines **Fluktuationsterms** $\xi(t)$ in der Beschleunigungsgleichung berücksichtigt werden:

$$\dot{v}_\alpha(t) = a_\alpha(v_\alpha, s_\alpha, v_p) + \xi_\alpha(t). \quad (11.18)$$

Diesen Fluktuationsterm kann man als "Bekenntnis der Unkenntnis" ansehen.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit (Verständnisfrage: warum?) kann man

$$\langle \xi_\alpha(t) \rangle = 0 \quad (11.19)$$

annehmen.

Im einfachsten (aber sehr unrealistischen) Fall nimmt man außerdem an, dass die Schwankungen unabhängig von vergangenen Schwankungen und außerdem für jeden Fahrer unabhängig von den Nachbarfahrzeugen sind. Dann sind die Fluktuationen durch die Korrelationsfunktion

$$\langle \xi_\alpha(t) \xi_\beta(t') \rangle = A \delta_{\alpha\beta} \delta(t - t') \quad (11.20)$$

charakterisiert. Hier ist $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und 0 sonst. Die "delta-Funktion" $\delta(t)$ ist =0 für alle $t \neq 0$. Für $t = 0$ divergiert sie so stark, dass für das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ gilt.

Schließlich gibt A (mit der Einheit m^2/s^3) die Stärke der Fluktuationen an. Man kann sich die Auswirkung der Fluktuationsstärke A anhand folgender Fälle klarmachen:

- Falls die Geschwindigkeit $v = v_{\text{mit}}$ zur Zeit t_0 fest ist und überhaupt keine deterministischen Beschleunigungen wirken ($a_\alpha = 0$), so nimmt die Geschwindigkeitsvarianz mit der Zeit zu:

$$\langle (v(t) - v_{\text{mit}})^2 \rangle = A(t - t_0)$$

- Wendet man die Fluktuationen auf ein gemäß dem OVM, Gl. (11.7) fahrendes Fahrzeug auf leerer Strecke an, so betragen die Schwankungen um die Wunschgeschwindigkeit nach hinreichend langer Zeit

$$\langle (v(t) - v_0)^2 \rangle = 2A\tau$$

11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

Mit Anpassungszeiten in der Größenordnung 10 s und beobachteten Geschwindigkeitsschwankungen von etwa 10 km/h liegt A zwischen 0.1 und 1 m²/s³.

Solche Fluktuationsterme werden vor allem im Gipps-Modell häufig verwendet. Ein realistischerer Ansatz wird im Human Driver Model (vgl. Abschnitt 11.6.3) verfolgt:

1. Die Fluktuationen wirken nicht direkt auf die Beschleunigung, sondern auf die Eingangsgrößen v_α , s_α und v_p und modellieren so direkt Schätzfehler
2. Die Fehler wirken “multiplikativ”, z.B. steigt der Schätzfehler für den Abstand mit dem wahren Abstand.
3. Die Fehler haben eine endliche “Korrelationszeit”: Wenn ein Fahrer zu einer gewissen Zeit den Abstand z.B. um 10% unterschätzt, wird er ihn eine Sekunde später mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit ebenfalls unterschätzen.

11.6.3. Mehrere Vorderfahrzeuge: Das Human Driver Model

Das **Human Driver Model** (HDM) ist ein auf alle Mikromodelle mit Beschleunigungsgleichungen der Form (11.16) anwendbares *Metamodell* (d.h. ein Modell für Modelle), welches endliche Reaktionszeiten und Schätzfähigkeiten mit Berücksichtigung mehrerer Vorderfahrzeuge und zeitlicher Antizipation kombiniert.

Zeitliche Antizipation

Dieser berühmte “Siebte Sinn” der Autofahrer wird im HDM durch einfache **Heuristiken**⁷ modelliert: Ziel ist es, anhand dieser Heuristiken eine Prognose über Abstände und Geschwindigkeiten zu treffen, welche genau die Reaktionszeit überbrückt und bei exaktem Zutreffen der Heuristik dasselbe Ergebnis wie die Abschätzung ohne Reaktionszeit liefern würde.

- Für die Abschätzung von Abstand s^{est} und Geschwindigkeitsdifferenz Δv^{est} wird die **Heuristik der unveränderten Geschwindigkeiten** angenommen:

$$s_\alpha^{\text{est}}(t) = s_\alpha(t - T_r) - T_r \Delta v_\alpha(t - T_r), \quad (11.21)$$

$$\Delta v_\alpha^{\text{est}}(t) = \Delta v_\alpha(t - T_r). \quad (11.22)$$

- Für das eigene Fahrzeug ist auch die Beschleunigung gut abschätzbar, so dass die Reaktionszeit durch die **Heuristik konstanter Beschleunigungen** überbrückt wird:

$$v_\alpha^{\text{est}}(t) = v_\alpha(t - T_r) + T_r a_\alpha(t - T_r). \quad (11.23)$$

⁷Eine Heuristik ist eine nicht begründbare Annahme, welche der Erfahrung nach häufig zutrifft und daher eine sinnvolle Basis für Entscheidungen mit unvollständiger Information bietet.

11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

Im HDM wird zu den so erhaltenen Werten s^{est} , v^{est} und Δv^{est} noch der stochastische Schätzfehler hinzugefügt und die dadurch erhaltenen Abschätzungen der Eingangsgrößen als Argumente für die Beschleunigungsfunktion des zugrundeliegenden Mikromodells verwendet.

Berücksichtigung mehrerer Fahrzeuge

Im Allgemeinen sieht man durch das Vorderfahrzeug hindurch oder am Vordefahrzeug vorbei weitere Fahrzeuge, auf die man reagieren kann⁸ Um dies im Rahmen des HDM zu modellieren, wird die Beschleunigungsfunktion (11.16) in eine **freie Beschleunigung** a^{free} und einen **Wechselwirkungsanteil** a^{int} aufgrund der Behinderung durch andere Fahrzeuge aufgespalten:

$$a(s_\alpha, v_\alpha, \Delta v_\alpha) := a_\alpha^{\text{free}}(v_\alpha) + a^{\text{int}}(s_\alpha, v_\alpha, \Delta v_\alpha). \quad (11.24)$$

n Vorderfahrzeuge werden nun einfach dadurch berücksichtigt, dass in der Beschleunigungsfunktion deren Wechselwirkungsanteile summiert werden:

$$a_\alpha^{\text{multi}} = a_\alpha^{\text{free}} + \sum_{\beta=\alpha-n}^{\alpha-1} a_{\alpha\beta}^{\text{int}}, \quad (11.25)$$

Hier ist $a_{\alpha\beta}^{\text{int}}$ die Behinderung, welche Fahrzeug β auf das Fahrzeug α ausübt. Da die Behinderung mit wachsendem Abstand stark abnimmt, bleibt in diesem Ansatz das unmittelbare Vorderfahrzeug in den meisten Situationen maßgeblich⁹. Nur, wenn Fahrzeuge weiter vorne bremsen oder langsamer fahren, wirkt sich dies in Gl. (11.25) verstärkt aus, so dass der HDM-Fahrer rechtzeitig bremst und so Staufronten “entschärft” werden.

11.7. Kalibrierung von Fahrzeugfolgmodellen

TODO: Das Material von Arne ..

⁸Dies ist hinter LKWs oder Lieferfahrzeugen ohne Fenster nicht möglich, weshalb das Fahren hinter solchen Fahrzeugen als unangenehm empfunden wird und sich der Abstand messbar vergrößert.

⁹auch bei Berücksichtigung von unendlich vielen Vordefahrzeugen würde sich der Gleichgewichtsabstand im IDM nur um etwa 25% vergrößern

12. Mikroskopische Verkehrsmodelle II: Zelluläre Automaten

12.1. Allgemeines

Einen Spezialfall von Mikromodellen stellen die **zellulären Automaten** (CA) dar. Bei einem zellulären Automaten sind alle Größen diskretisiert (vgl. Abb. 12.1):

- Der Ort in Zellen der Länge l ,
- die Zeit in Zeitschritte der Länge Δt ,
- und der Zustand als binäre Variable (Zelle ist besetzt oder nicht besetzt, Geschwindigkeitsstufe einer besetzten Zelle etc).

Die Update-Gleichung eines CA hat folgende allgemeine Form:

$$\{\rho_{im}(t+1), Z_{im}(t+1)\} = f_{CA}(\{\rho_{im}(t), Z_{im}(t), \xi(t)\}) \quad (12.1)$$

Hierbei sind die ρ_{im} binäre Variablen mit der Bedeutung

$$\rho_{im} = \begin{cases} 1 & \text{Zelle } i \text{ auf Fahrstreifen } m \text{ ist besetzt,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (12.2)$$

Z_{im} sind diskrete innere Zustandsvariablen der besetzten Zellen, die z.B. mit der Geschwindigkeit assoziiert werden können,¹ und $\xi(t)$ fasst die in den meisten CAs vorhandenen Zufallskomponenten zusammen. Der aktuelle Zustand eines CA ist eindeutig durch die Menge $\{(\rho_{im}, Z_{im}), i = 1, \dots, n, m = 1, \dots, I\}$ der Besetzungszahlen und inneren Zustände auf den n Zellen auf jeder der I Fahrstreifen festgelegt und das konkrete Modell durch die Modellfunktion f_{CA} charakterisiert.

Im Verkehrs-Kontext wird die allgemeine, auf den Zellen basierende Update-Gleichung (12.1) häufig durch eine äquivalente fahrzeugbezogene Beschreibung ersetzt: Man fasst die besetzten Zellen α als "Fahrzeuge" mit den Zuständen Ort $x_\alpha \in \mathbb{N}$, Geschwindigkeit $v_\alpha \in \mathbb{N}$ und ggf. Fahrstreifenindex m_α auf und erhält Update-Gleichungen der Form

$$v_\alpha(t+1) = f_1(\{x_{\alpha'}(t), v_{\alpha'}(t), m_{\alpha'}(t), \xi(t)\}), \quad (12.3)$$

$$m_\alpha(t+1) = f_2(\{x_{\alpha'}(t), v_{\alpha'}(t), m_{\alpha'}(t)\}), \quad (12.4)$$

$$x_\alpha(t+1) = x_\alpha(t) + v_\alpha(t+1). \quad (12.5)$$

¹Einige CAs haben weitere innere Variablen, z.B. "0=normale Fahrweise, 1=defensive Fahrweise" oder "0=Bremslicht aus, 1=Bremslicht an", die aber an den grundlegenden Überlegungen nichts ändern.

12. Mikroskopische Verkehrsmodelle II: Zelluläre Automaten

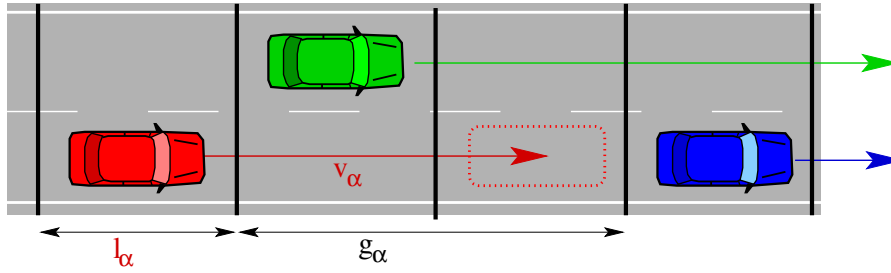


Figure 12.1.: Bei zellulären Automaten ist die Strecke in feste “Zellen” der Länge l und die Zeit in feste Update-Schritte der Länge Δt eingeteilt. Die Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung beträgt ein Vielfaches von $\Delta x/\Delta t$ bzw. $\Delta x/(\Delta t)^2$. Das rote Fahrzeug hat die Geschwindigkeit $v = 2$ und das Grüne $v = 3$.

Verständnisfrage:

Machen Sie sich klar, dass die Fortbewegungs-Gleichung (12.5) das Analog zu einem Euler-Updateschritt für Fahrzeugfolgemodelle darstellt!

12.2. Das Nagel-Schreckenberg-Modell

Eines der bekanntesten und einfachsten CA-Modelle ist das **Nagel-Schreckenberg-Modell** (NS-Modell). In seiner Grundform gilt es für einen Fahrstreifen und ist durch folgende Update-Gleichungen definiert:

1. Deterministisches Beschleunigen und Bremsen (g_α ist die Zahl der Leerplätze (“gaps”) vor dem Fahrzeug α):

$$v_\alpha^*(t+1) = \min(v_\alpha(t) + 1, v_0, g_\alpha), \quad (12.6)$$

2. “Trödeln”:

$$v_\alpha(t+1) = \begin{cases} \max(v_\alpha^*(t+1) - 1, 0) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p, \\ v_\alpha^*(t+1) & \text{sonst,} \end{cases} \quad (12.7)$$

3. Fortbewegen:

$$x_\alpha(t+1) = x_\alpha(t) + v_\alpha(t+1). \quad (12.8)$$

12. Mikroskopische Verkehrsmodelle II: Zelluläre Automaten

Verständnisfrage:

Machen Sie sich die Bedeutung der drei Update-Gleichungen des NS-CA aus Fahrersicht klar: Wie hoch ist die maximale Beschleunigung und die maximale Verzögerung? Wie reagieren die modellierten Fahrer auf bremsende Vorderfahrzeuge? Ist das Modell unfallfrei? Wie groß ist der minimale Bruttoabstand, wie groß die Wunschgeschwindigkeit? Warum wird p auch als “Trödelwahrscheinlichkeit bezeichnet?

Die beim NS-Modell üblicherweise verwendete Diskretisierung ist gegeben durch $\Delta x = 7.5$ m und $\Delta t = 1$ s. Dies bedeutet insbesondere, dass Geschwindigkeiten nur Vielfaches von 7.5 m/s und Beschleunigungen Vielfaches von 7.5 m/s^2 annehmen können. Weiter entwickelte Modelle haben häufig eine wesentlich feinere Diskretisierung, z.B. $\Delta x = 2.5$ m und entsprechend mehr Geschwindigkeitsstufen. Bei hinreichend feiner Ortsdiskretisierung erhält man *de-facto* ein kontinuierliches Fahrzeugfolgemodell im Verbund mit einem konkreten numerischen Integrationsschema.

Verständnisfrage:

Welche Wunschgeschwindigkeit v_0 würde man beim NS-Modell für Stadtverkehr wählen, welche für Autobahnen? Vergleichen Sie außerdem die im Modell maximal mögliche Dichte $\rho = 1$ mit tatsächlich vorkommenden maximalen Dichten!

12.3. Zelluläre Automaten und Fahrzeugfolgemodelle im Vergleich

Zelluläre Automaten und zeitkontinuierliche Fahrzeugfolgemodelle stellen die wichtigsten Kategorien von Mikromodellen dar ² Beide Kategorien haben, je nach Anwendungsbereich, ihre Vor- und Nachteile:

- Bei Fahrzeugfolgemodellen sind Ort, Zeit und Geschwindigkeit kontinuierliche Größen, bei CAs sind alle drei Größen diskret. Lediglich der Fahrstreifenindex ist i.A. in beiden Kategorien von Mikromodellen diskret ³
- Fahrzeugfolgemodelle werden meist als Differenzialgleichung formuliert, die i.A. numerisch gelöst werden muss. Die Wahl der verwendete “Integrationsmethode”, z.B. das **Euler-Verfahren** oder das **Runge-Kutta-Verfahren**, liegt in

²Es sind weitere Kategorien möglich, z.B. ist das in Gl. (11.9) vorgestellte Newell-Modell, streng genommen, eine “iterierte kontinuierliche Abbildung” (iterated map), bei der Ort und Geschwindigkeit kontinuierlich, die Zeit aber explizit diskret ist.

³Sehr detaillierte Fahrzeugfolgemodelle modellieren allerdings auch die transversale Dynamik zeitkontinuierlich. Ein Fahrstreifenwechsel dauert übrigens etwa 3-5 s.

12. Mikroskopische Verkehrsmodelle II: Zelluläre Automaten

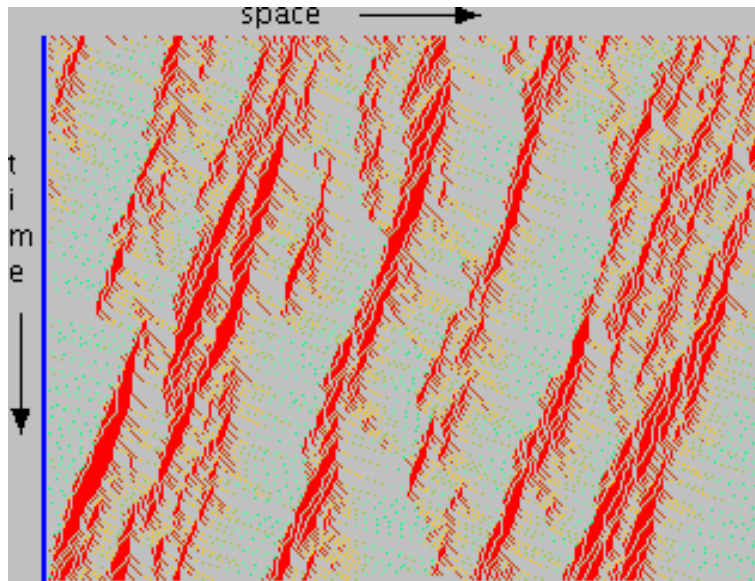


Figure 12.2.: Beispiel einer Simulation mit dem NS-Modell für $\rho = 0.27$ (entspricht 36 Fz/km), $p = 0.5$ und $V_0 = 5$ (entspricht 135 km/h). Siehe <http://rcswww.urz.tu-dresden.de/helbing/RoadApplet/>

der Verantwortung des Anwenders. Hingegen bilden bei CA's das Modell und der zeitliche Update-Schritt eine Einheit.

- CA's sind i.A. schneller zu implementieren. Auch die Modellierung von Fahrstreifenwechseln ist in CA's konzeptionell einfacher.
- Einfache CA's wie das NS-Modell haben gegenüber zeitkontinuierlichen Mikromodellen einen Geschwindigkeitsvorteil, vor allem bei Simulation mehrerer Fahrstreifen und bei Fußgängermodellierung. Mehr als 1 Million Fahrzeuge können *realtime* simuliert werden. Für die neueren, detaillierteren Modelle nimmt diese Geschwindigkeit jedoch wegen der feineren Diskretisierung und zusätzlicher Regeln um etwa eine Zehnerpotenz ab und kommt damit in den Bereich von Fahrzeugfolgemodellen.⁴
- Die Modellparameter von CA's sind häufig unanschaulich oder haben unrealistische Werte (wie die Beschleunigung von 7.5 m/s^2 und eine potenziell um ein Vielfaches höhere Verzögerung) im NS-Modell. Außerdem funktionieren die meisten CA's ohne *ad-hoc* hinzugefügten stochastischen Terme (wie dem "Trödeln" im NS-Modell) nicht.
- Wegen der groben Diskretisierung eignen sich CA nicht zur Modellierung des menschlichen Fahrverhaltens, von verschiedenen Fahrstilen oder zur Beurteilung der

⁴Im Zeitalter immer schneller werdender Rechner nimmt die Bedeutung der Ausführungsgeschwindigkeit ab.

12. Mikroskopische Verkehrsmodelle II: Zelluläre Automaten

verkehrlichen Wirkung von Verkehrsbeeinflussungsmaßnahmen (vgl. Teil III dieses Skripts). Da sich im Großem Maßstab viele Details “wegmitteln”, ist eine Anwendung von CA’s bei der modellgestützten Verkehrszustandsbestimmung (Abschnitt 16) sinnvoll und ist auch realisiert (vgl. <http://www.autobahn.nrw.de/>). Allerdings konkurrieren CA’s hier mit den makroskopischen Verkehrsflussmodellen.

Verständnisfrage:

Wie würde sich ein gemäß dem deterministische NS-Modell ($p = 0$) agierender Fahrer einer roten Ampel annähern?

Aufgabe:

Zeichnen Sie das Fundamentaldiagramm des deterministischen NS-Modells für $v_0 = 1$ und $v_0 = 5$. Was ist für einen “Trödelfaktor” $p > 0$ zu erwarten?

13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen

Die alltägliche Erfahrung zeigt, dass es im realen Verkehr sehr verschiedenartige "Fahrer-Fahrzeug-Einheiten" mit sehr unterschiedlichem Fahrverhalten gibt: Die Unterschiede sind teils durch den Fahrzeugtyp (PKW, LKW, Motorräder, in der Stadt auch Fahrräder), teils durch die Fahrweise (sportlich, vorausschauend, ängstlich, aggressiv ...) begründet.

Diese unter dem Begriff **heterogener Verkehr** zusammengefasste Verschiedenartigkeit hat drastische Auswirkungen auf die Kapazität und Stabilität des Verkehrs. Der Simulationsbedarf wird durch den in naher Zukunft stark zunehmenden LKW-Verkehr und die zunehmende Verbreitung von ACC-Systemen noch verstärkt.

Simulationen heterogenen Verkehrs sind eine Domäne von Mikromodellen, da man einfach jedem Fahrzeug seine eigenen Modellparameter mitgeben kann. Auch die gleichzeitige Simulation verschiedener Fahrzeuge mit unterschiedlichen Modellen ist möglich und sinnvoll.

Wichtige Gesichtspunkte bei der Modellierung heterogenen Verkehrs mit Mikromodellen sind vor allem:

- Zur Modellierung der verschiedenen Fahrstile sind anschauliche Modellparameter wie die des IDM hilfreich. Beispielsweise wird ein typischer LKW – abgesehen von seiner großen Fahrzeuglänge l und einer niedrigen freien bzw. "Wunsch"geschwindigkeit $v_0 = 88$ km/h – durch niedrige Beschleunigungsfähigkeiten a , einer großen (gesetzlich vorgeschriebenen!) Folgezeit T und eine relativ antizipierende Fahrweise (kleines b) beschrieben. Ein sportlich-aggressiver Fahrer wird durch hohe Werte von v_0 und a sowie sehr niedriger Folgezeit T charakterisiert, während ein ängstlicher und unerfahrener Fahrer durch kleine Werte von a , aber relativ große Werte von b beschrieben wird.
- Die Verteilungsfunktionen von Folgezeiten T kann man empirisch aus Einzelfahrzeugdaten bei großem Verkehrsaufkommen bestimmen (Abb. 13.1), die der Wunschgeschwindigkeit v_0 aus Einzelfahrzeugdaten bei geringer Verkehrsdichte (Abb. 13.2). Enthalten die Daten die Fahrzeuglängen l_α , ist auch die Bestimmung des LKW-Anteils möglich.
- Die Modellierung heterogenen Verkehrs ist nur im Verbund mit Spurwechseln sinnvoll, da sich ansonsten einfach eine große Schlange hinter dem langsamsten Fahrzeug bilden würde. Man benötigt also neben einen für mehrere Fahrzeugtypen parametrisierbaren Longitudinalmodell auch ein Spurwechselmodell.

13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen

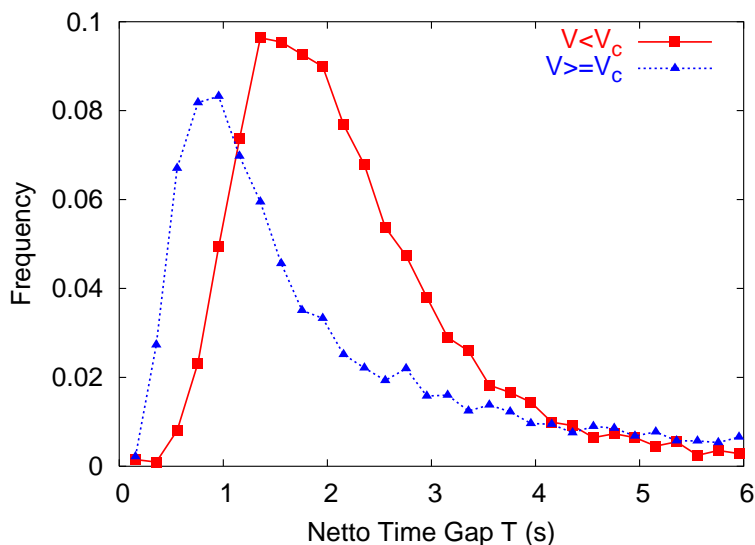


Figure 13.1.: Zeitlückenverteilung für zwei Geschwindigkeitsbereiche (freier und gestauter Verkehr) bzw. vier verschiedene Dichtebereiche (auf der Autobahn A5 in der Nähe von Frankfurt)

13.1. Zeitlückenverteilung

Empirische Zeitlückenverteilungen, die ein Modell heterogenen Verkehrs reproduzieren sollte, werden aus Einzelfahrzeugdaten gewonnen und haben folgende Merkmale:

- Die Zeitlücken streuen stark; häufig ist sogar die Standardabweichung größer als das arithmetische Mittel.
- Die Verteilungen sind stark asymmetrisch. Sowohl im freien als auch in gestauten Verkehr kommen Werte über 10 s (!) vor.
- Im freien Verkehr, z.B. charakterisiert durch Geschwindigkeiten oberhalb einer Grenzggeschwindigkeit V_c , ist die wahrscheinlichsten Folgezeit (Modalwert) \hat{T} wesentlich kleiner (!) als im gestauten Verkehr. In beiden Fällen ist \hat{T} wesentlich kleiner als der Fahrschulregel "Abstand gleich halber Tacho" entsprechend.
- Auch das arithmetische Mittel der Folgezeiten ist im dichten, aber noch freien Verkehr deutlich kleiner sein als in beliebigen Stauzuständen. Da der Verkehrsfluss und damit die Kapazität das Inverse des arithmetischen Mittels (allerdings der Bruttofolgezeiten) ist, ergibt sich auch aus den Folgezeitverteilungen der bereits bekannte Flussabfall (**Capacity drop**) beim Verkehrszusammenbruch, der bewirkt, dass sich ein einmal entstandener Stau i.d.R. nicht so schnell wieder auflöst.

Die gemessene Zeitlückenverteilung ist i.A. nicht identisch zur Verteilung der *gewünschten*

13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen

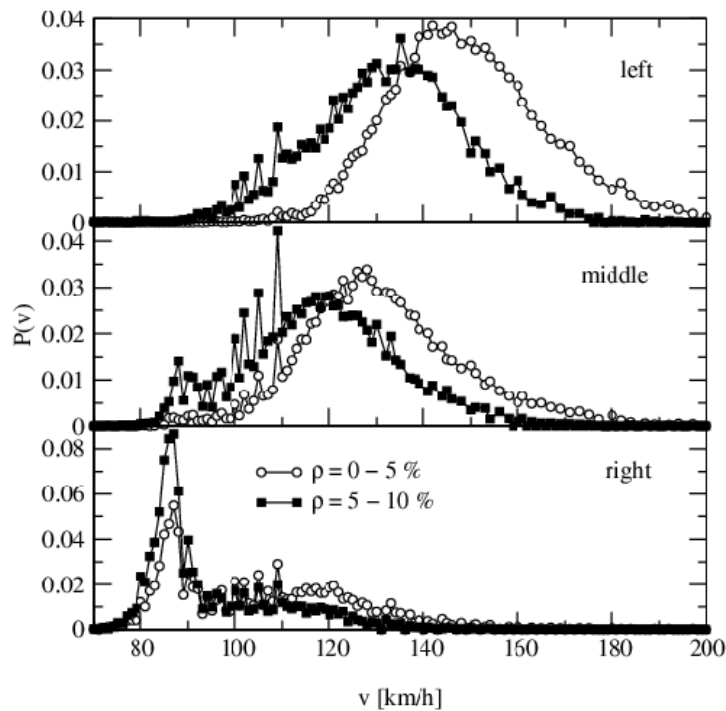


Figure 13.2.: Geschwindigkeitsverteilung bei sehr geringen Dichten auf der A3 (Drei Fahrstreifen pro Richtung). (Quelle: Knospe et. al., cond-mat/0203347)

Folgezeiten, sondern nur eine obere Schranke. Effekte, die die tatsächliche Folgezeit größer als die gewünschte werden lassen, sind u.a.

- dynamische Ursachen, z.B. kann bei mangelnder Beschleunigungsfähigkeit das Vorderfahrzeug "davonfahren",
- und natürlich die Tatsache, dass bei freiem Verkehr viele Fahrzeuge gar keinem Vorderfahrzeug folgen.

Dies erklärt teilweise die Asymmetrie der Verteilungen. Bemerkenswert ist auch, dass bei freiem Verkehr mit z.B. 360 Fz/h/Spur, d.h. einem arithmetischen Mittel der Bruttofolgezeit von 10 s, der wahrscheinlichste Wert der Nettofolgezeit immer noch unter 1 s liegt!

13.2. Geschwindigkeitsverteilung innerhalb eines Fahrstreifens

Empirisch bestimmte Geschwindigkeitsverteilungen stellen eine untere Schranke für die Verteilung der Wunschgeschwindigkeiten dar. Für sehr geringe Dichten (offene Symbole

13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen

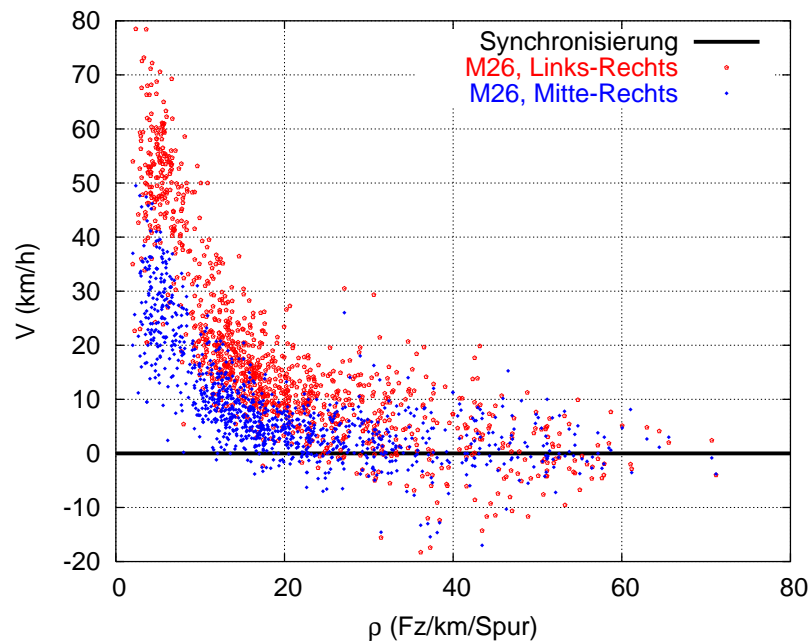


Figure 13.3.: Geschwindigkeitsdifferenz zwischen benachbarten Fahrstreifen (A9-Süd bei München)

in Abb. 13.2) kann man davon ausgehen, dass man näherungsweise die zu modellierende Wunschgeschwindigkeitsverteilung selbst bekommt.

Die aus Einzelfahrzeugdaten gewonnenen Geschwindigkeitsverteilungen haben folgende Merkmale:

- Im Gegensatz zu den Folgezeitverteilungen ist die Verteilung auf der linken und mittleren Fahrstreifen symmetrisch und etwa gaußförmig.
- Auf der rechten Fahrstreifen ist die Verteilung hingegen häufig bimodal (doppelgipflig), was durch die Überlagerung der Verteilungen von PKWs und LKWs erklärbar ist.
- Für höhere Verkehrsdichten gleichen sich die Geschwindigkeitsunterschiede bezüglich der Fahrstreifen an (Abb. 13.3) und auch die Bimodalität verschwindet.

13.3. Auswirkungen heterogenen Verkehrs im Fundamentaldiagramm

Die starke Variation der Zeitlücken erklärt teilweise die starke Variation von Fluss-Dichte-Daten im behinderten bzw. gebundenen Verkehr: Eine Variation von Dichte und

13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen

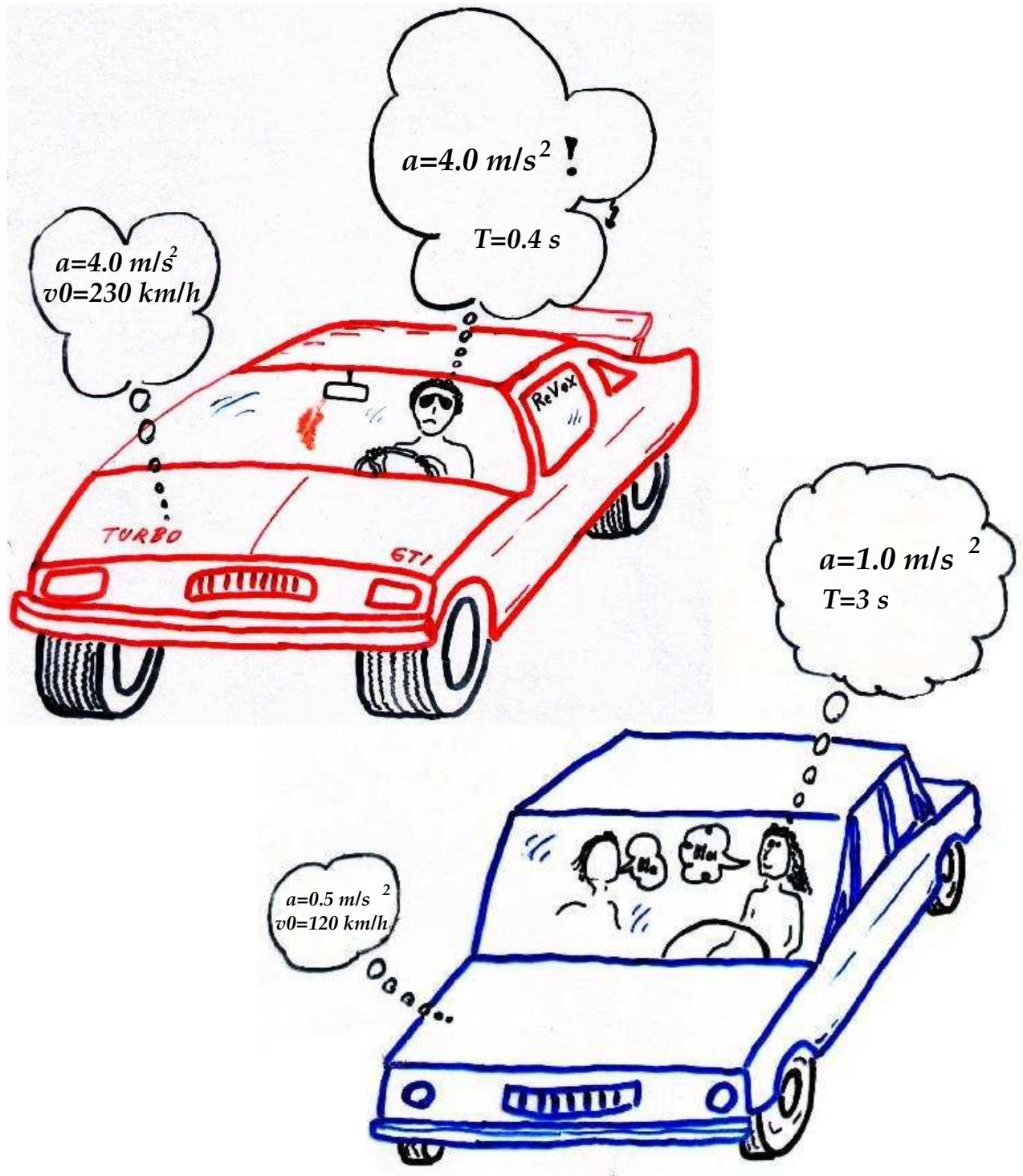


Figure 13.4.: In manchen Modellen wie dem IDM charakterisieren die Modellparameter direkt den Fahrstil und die Leistungsfähigkeit des Fahrzeugs.

13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen

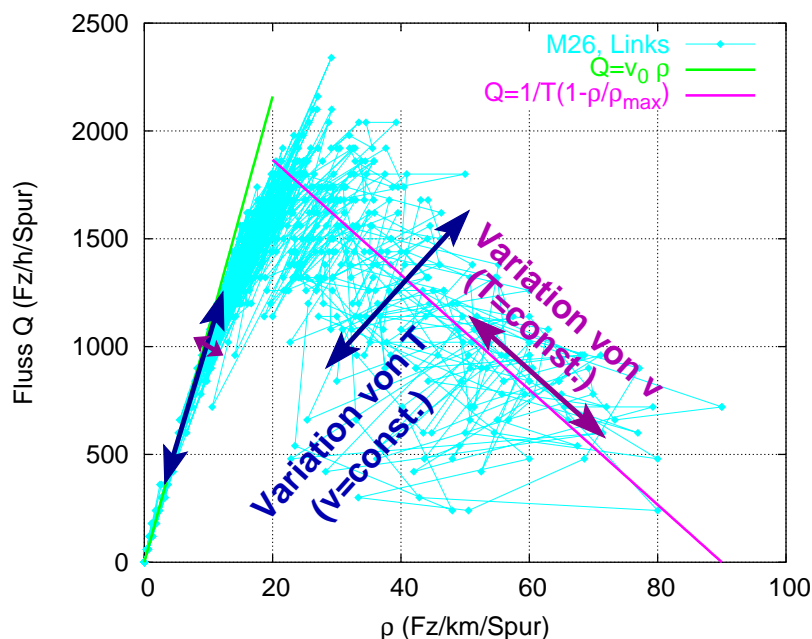


Figure 13.5.: Auswirkungen der Streuungen der Folgezeiten im Fundamentaldiagramm.

Zeitlücken führt im freien Verkehr zu Variationen der Fluss-Dichte-Daten entlang einer eindimensionalen Kurve ($\approx \rho v_0$). Im gebundenen Verkehr jedoch führt eine Variation der Dichte zu Änderungen der Fluss-Dichte-Daten, die senkrecht zu den durch Variation der Zeitlücken bedingten Änderungen verlaufen. Insgesamt ergibt sich daraus im gebundenen Verkehr ein erratischer Verlauf der Fluss-Dichte-Daten.

Zu bemerken ist, dass unterschiedliche Zeitlücken nicht nur durch heterogenen Verkehr, d.h. unterschiedliche Wunschzeitlücken der einzelnen Fahrer zustandekommen, sondern auch durch Nichtgleichgewichte (der tatsächliche Abstand entspricht nicht dem Wunschabstand), die z.B. durch Stop-and-Go Verkehr erzwungen werden. Letzterer Mechanismus führt auch bei gleichartigen Fahrzeugen und Fahrern zu Streuungen im Fundamentaldiagramm wie z.B. in Abb. 5.9, die eine Simulation gleichartiger Fahrzeuge zeigt.

13.4. Modelle für die Querdynamik (Fahrstreifenwechsel)

Martin: nächsten Absatz erweitern! MOBIL to do

13.4.1. Allgemeines zur Modellierung der Querdynamik

Wie bereits erwähnt, ist eine realistischen Modellierung von heterogenem Verkehr nur bei gleichzeitiger Modellierung der Querdynamik, also der Fahrstreifenwechsel mit **Spur-**

13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen

wechselmodellen sinnvoll. Diese Modelle sind i.A. komplexer als Beschleunigungsmodelle. Insbesondere muss auch ein Minimalmodell mehrere Fremdfahrzeuge berücksichtigen: Nicht nur das unmittelbare Vorderfahrzeug, sondern auch das Vorder- und Hinterfahrzeug auf der Zielfahrstreifen. Die Verhaltensmuster und der Ablauf sind ebenfalls komplexer. Insbesondere kann man i.A. mehrere Phasen unterscheiden:

- *Strategische und taktische Phase:* Hier werden eigene und fremde Fahrstreifenwechsel durch antizipatorische Maßnahmen wie Beschleunigen, Bremsen, eine Lücke schaffen etc. erleichtert. Speziell bei dichtem und gestauten Verkehr ist diese Phase zur realistischen Beschreibung wichtig.
- *Entscheidung zur operativen Durchführung.* Hier wird entschieden, ob ein Fahrstreifenwechsel zum gegenwärtigen Zeitpunkt initiiert werden soll.
- *Eigentliche Durchführung:* Je nach Modell entweder instantan wie bei den zellulären Automaten oder Coupled-Map Fahrzeugfolgmodellen oder innerhalb der realistischen Zeitspanne von 3-4 s. In vielen Simulatoren wie PTV-Vissim oder die Simulationen auf www.traffic-simulation.de/movie3d wird der Fahrstreifenwechsel grafisch zwar kontinuierlich dargestellt, bezüglich der Entscheidungslogik ("auf welcher Fahrstreifen befindet sich das Fahrzeug?") jedoch ein instantaner Fahrstreifenwechsel zum Beginn des "grafischen" Fahrstreifenwechsels angenommen.

Fahrstreifenwechselmodelle hängen auch stärker als Beschleunigungsmodelle von länderspezifischen Gesetzen und Regelungen ab.

- auf europäischen Autobahnen führt z.B. das Rechtsfahrgebot bei geringer Verkehrsdichte zu großen Differenzen der Geschwindigkeiten auf linker, mittlerer und rechter Fahrstreifen, die im Wesentlichen die Verteilung der Wunschgeschwindigkeiten widerspiegeln, vgl. Abb. 13.3. Im gebundenen Verkehr mit Dichten ab etwa 30 Fz/km/Spur oder h oder kann keiner mehr die Wunschgeschwindigkeit fahren ("im Stau sind alle gleich") und der Verkehrsverlauf in den benachbarten Fahrstreifen wird infolge von ausgleichenden Wechseln zum jeweils schnelleren Fahrstreifen *synchronisiert*, d.h. die Geschwindigkeitsverläufe sind mehr oder weniger gleich.
- Auf z.B. amerikanischen Freeways mit gleichmäßigeren Geschwindigkeiten ist gerade im Falle freien Verkehrs das Wechselverhalten ganz anders. Unterschiedliche Randbedingungen wie etwa das fehlende Rechtsüberholverbot verstärken die Unterschiede.

Die meisten "einfachen" Fahrstreifenwechselmodelle modellieren nur die operative Entscheidung zum Fahrstreifenwechsel, der ggf. instantan durchgeführt wird. Die operative Entscheidung basiert i.A. auf zwei Kriterien:

- **Anreizkriterium:** Kann ich auf einer anderen Fahrstreifen schneller fahren ("Blick nach vorne") oder will ich aus anderen Gründen (z.B. Vorbereitung eines Abbiegevorgangs bzw, Wechsel vom Beschleunigungsstreifen einer Einfahrt auf die Hauptfahrbahn) auf diese Fahrstreifen wechseln?

13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen

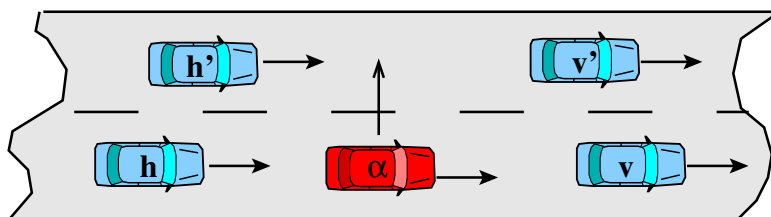


Figure 13.6.: Die betrachteten Fahrzeuge für einen Wechsel des roten Fahrzeugs α auf den benachbarten Fahrstreifen. Relevant sind i.A. die Vorderfahrzeuge v bzw. v' auf der “alten” Fahrstreifen und der Zielfahrstreifen, sowie die jeweiligen Hinterfahrzeuge h bzw. h' .

- **Sicherheitskriterium:** Ist ein Fahrstreifenwechsel sicher, d.h. nicht mit Unfällen oder zu starken erzwungenen Bremsmanövern der beteiligten Fahrzeuge verbunden? (“Blick nach hinten”).

13.4.2. Gap-acceptance Modelle

Im einfachsten Fall der sog. **gap-acceptance** Modelle wird zum Auswerten dieser beiden Kriterien nur die Abstände zum jeweiligen Vorder- oder Hinterfahrzeug ausgewertet, vgl. Abb. 13.6.

Die Kriterien sind z.B. gegeben durch

$$\begin{aligned} s'_\alpha &> s_\alpha && \text{Anreizkriterium,} \\ s'_{h'} &> s_{\text{safe}}(v_{h'}) && \text{Sicherheitskriterium.} \end{aligned} \quad (13.1)$$

Hier bedeuten s bzw. s' die Abstände der Fahrzeuge der Abb. 13.6 zum jeweiligen Vorderfahrzeug vor bzw. nach dem Wechsel und s_{safe} der Sicherheitsabstand, welcher z.B. gleich dem Folge-Abstand $s_{\text{safe}} = v_{h'}T$ mit der Folgezeit T gegeben sein kann. Ein Wechselwunsch des betrachteten Fahrzeugs α besteht also, wenn der Abstand zum Vorderfahrzeug auf der Zielfahrstreifen größer ist als auf der eigenen. Der Wechsel ist sicher, wenn nach dem Wechsel der Abstand des neuen Hinterfahrzeugs größer als der jeweilige Sicherheitsabstand ist.

So anschaulich diese Regeln sind, sie sind dennoch unrealistisch:

- Die *Geschwindigkeitsdifferenz* geht nicht ein: Offensichtlich macht es jedoch einen großen Unterschied, ob man nach dem Wechsel etwa gleich schnell ist wie das neue Hinterfahrzeug ist (dann ist Gap-acceptance OK), oder wesentlich langsamer, z.B. beim Einfahren. Dann würde obige Regel zu Notbremsungen bzw. Unfällen führen.
- Die Regel ist nur dann mit Longitudinalmodell kompatibel, falls dieses ebenfalls ein Gap-Acceptance Modell ist, wie z.B. das Newell-Modell oder der zelluläre Automat von Nagel und Schreckenberg.

13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen

Verständnisfrage:

Machen Sie sich die Folgen einer fehlenden Abhängigkeit von der Geschwindigkeitsdifferenz klar, in dem Sie das Fahrstreifenwechseln bei sehr geringer Geschwindigkeit (z.B. Baustelleneinfahrt ohne Beschleunigungsstreifen oder Abbiegen im Stadtverkehr) betrachten. Ab welcher Geschwindigkeit der Fahrzeuge auf der Hauptfahrbahn wären diese ggf. zu einer Vollbremsung mit $\dot{v} = -8 \text{ m/s}^2$ gezwungen?

13.4.3. Das Fahrstreifen-Wechselmodell MOBIL

Genau wie bei den Gap-Acceptance Modellen wird in diesem Modell nur die operative Wechselentscheidung, basierend auf den unmittelbaren Nachbarn, modelliert. Im Gegensatz zu den Gap-acceptance-Modellen ist MOBIL jedoch kompatibel mit den meisten Longitudinalmodellen (sowohl Fahrzeugfolgemodellen als auch *Coupled-map* Modelle und zelluläre Automaten) und berücksichtigt Geschwindigkeitsdifferenzen sofern diese im Longitudinalmodell enthalten sind. Es ist nämlich auf die Beschleunigungsfunktion des Longitudinalmodells gemäß dem “MOBIL-Prinzip” aufgebaut:

MOBIL - Minimizing overall braking deceleration induced by lane changes

Dieses Prinzip (“Minimiere die durch Fahrstreifenwechsel verursachten Bremsverzögerungen aller beteiligten Fahrzeuge”, d.h. maximiere die mittlere Beschleunigung) führt zu folgenden Kriterien:

$$\begin{aligned} a'_{\alpha} &> a_{\alpha} + p(a_h - a'_h + a_{h'} - a'_{h'}) + a_{\text{thr}} && \text{Anreizkriterium,} \\ a'_{h'} &> -b_{\text{safe}} && \text{Sicherheitskriterium.} \end{aligned} \quad (13.2)$$

- Die Modellparameter sind die maximal zulässige **sichere Bremsverzögerung** b_{safe} des neuen Hinterfahrzeugs (diese kann bei der Kombination mit dem IDM z.B. gleich der komfortablen Verzögerung b gewählt werden), der **“Höflichkeitsfaktor”** p und die **Wechselschwelle** a_{thr} , welche Wechseln mit nur marginalem Vorteil verhindert.
- Die neue Komponente dieses Modells ist der **Höflichkeitsfaktor**, welcher das – über Sicherheitsüberlegungen hinausgehende – Maß an Rücksichtnahme auf andere Verkehrsteilnehmer angibt:
 - Für $p = 0$ erhält man egoistische Fahrer, welche auch in fast allen anderen Wechselmodellen angenommen werden.
 - Für $p = 1$ werden die Bedürfnisse der anderen ebenso gewichtet wie die eigenen und das Akronym MOBIL gilt wörtlich.

13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen

Für $p = 0$ und $a_{\text{thr}} = 0$ ist MOBIL formal identisch zu den Gap-Acceptance-Modellen, nur dass das Kriterium nicht der Abstand, sondern die beschleunigung darstellt.

Verständnisfrage:

Wie schätzen Sie den Wert des Höflichkeitsfaktors für die beiden in Abb. 13.4 dargestellten Fahrer ein? Kann man mit p auch “Schulmeister”, welche absichtlich andere Verkehrsteilnehmer behindern, modellieren?

Aufgabe: MOBIL für das OVM

Formulieren Sie MOBIL für das OVM und zeigen Sie, dass in diesem Falle ein Gap-Acceptance Modell resultiert.

Aufgabe: MOBIL für das IDM

- Formulieren Sie die MOBIL-Kriterien für das IDM und den Fall, dass alle beteiligten Fahrzeuge nahezu gleich schnell fahren, Geschwindigkeitsdifferenzen also nicht berücksichtigt werden müssen.
- Einbiegen an mit “Stop” Schildern kontrollierten Kreuzungen auf die vorfahrtberechtigte Straße stellt ebenfalls einen Spezialfall eines Fahrstreifenwechsels dar. Das Anreizkriterium ist immer erfüllt und es wird angefahren, also auf die rechte Fahrstreifen der Hauptfahrbahn gewechselt, sobald das Sicherheitskriterium erfüllt ist. Formulieren Sie das Sicherheitskriterium für diesen Fall. Wie groß muss der Abstand von mit 50 km/h fahrenden Fahrzeugen auf der Hauptfahrbahn mindestens sein, falls IDM/MOBIL durch die Parameter $a = b = b_{\text{safe}} = 2 \text{ m/s}^2$, $T = 1 \text{ s}$, $v_0 = 50 \text{ km/h}$ und $s_0 = 0$ beschrieben werden?

Das MOBIL mit dem IDM “in action” ist auf der Webseite www.traffic-simulation.de zu sehen.

13.4.4. Bemerkung zum Thema Anreizkriterium zum Fahrstreifenwechseln

Eine Motivation, im Stau die Fahrstreifen zu wechseln, ist häufig der Eindruck, dass man gerade die langsamste Fahrstreifen “erwischt” hat. In folgender Aufgabe wird gezeigt, dass dies häufig ein Trugschluss ist: Aus statistischen Gründen ist der Zeitanteil, in der man im Stau von Fahrzeugen der Nachbarfahrstreifen überholt wird, i.A. größer als der Zeitanteil, in der man selber überholt. *Dies gilt häufig für jede Fahrstreifen!* Der Trugschluss dabei ist, dass man aus den Zeitanteilen auf die Geschwindigkeit der

13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen

Fahrstreifen im Vergleich zu den anderen Fahrstreifen schließt.

Verständnisfrage:

Begründen Sie, warum man im Stau tendenziell den größeren Zeitanteil auf der langsameren Fahrstreifen verbringt, und zwar unabhängig von der Wahl des Fahrstreifens. Machen Sie dabei zur Veranschaulichung folgenden Annahmen:

- Richtungsfahrbahn mit zwei gleichberechtigten Fahrstreifen (symmetrische Verkehrsregeln); überall herrscht zähfließender Verkehr.
- Auf beiden Fahrstreifen wird auf einem Streckenanteil von 50% langsamer (z.B. mit 10 km/h) gefahren, ansonsten schneller (z.B. mit 20 km/h). Die Geschwindigkeiten sind nicht vollständig synchronisiert, d.h. mal ist die linke Fahrstreifen schneller, mal die rechte.
- Die Fahrzeuge befinden sich näherungsweise immer im Gleichgewicht, d.h. “auf” einem von zwei Punkten im gestauten Zweig des Fundamentaldiagramms. Die Übergangszonen werden vernachlässigt.

Da MOBIL und andere rein auf die operative Aufgabe beschränkten Spurwechselmodelle ohne strategische Komponente immer “kurzsichtig” handeln, gilt dieser statistische Effekt auch für Spurwechselmodelle! Es wird daher häufig “hektischer” gewechselt als es sinnvoll ist!